الجبر الخطى المبسط

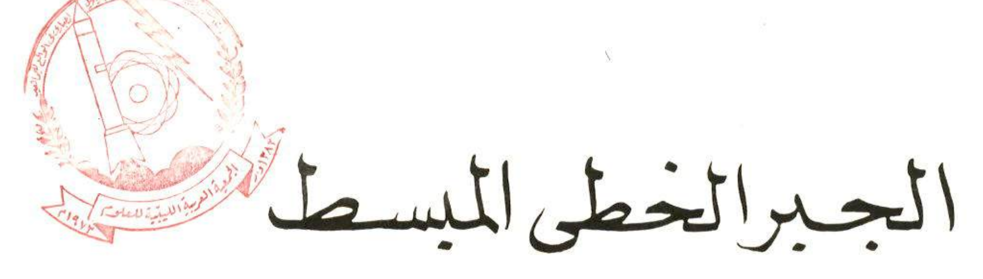
الطبعة الثانية

تأليف

هوارد أنتون
جامعة دريكسيل

175 YEARS OF PUBLISHING
1807 1982

جون وايلى وأولاده
نيويورك - شيشستر - برسبين - تورنتو



الجبر الخطى المبسط

الطبعة الثانية

تأليف

هـــوارد أنتـــون

جامعة دريكسيل

ترجمة

دكتور سامح سامى داود

قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة عين شمس

جمهورية مصر العربية

دكتور فايد فائق محمد غالب

قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة عين شمس

جمهورية مصر العربية

مراجعة

دكتور راجى حليم مقار

أستاذ ورئيس قسم الرياضة البحتة

كلية العلوم - جامعة عين شمس

جمهورية مصر العربية

جـون وايـلى وأولاده

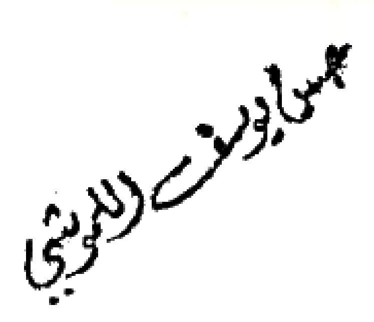
نيويورك - شيشستر - برليسبين - تورنتو

Published simultaneously in England by
John Wiley & Sons, Ltd.

يتم نشر هذا الكتاب فى ذات الوقت فى انجلترا بواسطة دار جون وايلى وأولاده ليمتد .

ISBN — 0 — 471 — 06389 — 4

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

مقدمة

يقدم هذا المرجع معالجة مبسطة للجبر الخطى بحيث تكون مناسبة للطلاب الجدد أو المنقولين إلى السنة الثانية فى الجامعات . ولا يتطلب دراية بالتفاضل والتكامل . ولكن على الرغم من هذا فقد ضمنته عدداً من التمارين للطلبة الذين لديهم خلفية فى التفاضل والتكامل وقد وضعت عليها بوضوح العلامة « للطلبة الذين درسوا التفاضل والتكامل » .

وكان هدفى من كتابة هذا الكتاب أن أقدم أساسيات الجبر الخطى بأكثر الطرق وضوحاً . وكان العامل التعليمى هو الاعتبار الأول والعامل الشكلى هو الاعتبار الثانوى . وقد درست الأفكار الأساسية ، كلما أمكن هذا ، بأمثلة حسابية (أكثر من مائتين) وبالتفسيرات الهندسية أيضاً .

وقد اختلفت طرق معالجتى للاثباتات . فتلك الإثباتات البدائية والتى لها مضمون تعليمى ملموس قد عرضت بدقة تامة وبأسلوب مفهوم للمبتدئين وبعض الإثباتات الأكثر صعوبة ولكن المفيدة تعليمياً قد وضعت فى نهاية القسم وأشير إليها « اختيارى » وعلى الرغم من هذا قد حذفت إثباتات أخرى تماما مع التركيز فقط على تطبيق النظرية . وفى كل مرة حذف الإثبات حاولت أن أوحى بالنتيجة عادة بمناقشة حول مغزاها فى الفضاء الثنائى أو الفضاء الثلاثى .

ومن خبرتى فإن رمز Σ يكون عائقاً أكثر منه مفيداً للمبتدئين فى الجبر الخطى . لهذا فقد تجنبت عموما استخدامه .

ويعتبر فرضاً تعليمياً أن يسير المحاضر من المألوف إلى غير المألوف ومن المحدد إلى المجرد ويعكس ترتيب الأبواب مدى تمسكى بهذا المبدأ .

الباب الأول : يتعلق بأنظمة المعادلات الخطية وكيفية حلها وبعض خواصها ويحتوى أيضاً على المادة الأساسية فى المصفوفات وخواصها الحسابية .

الباب الثانى : يتعلق بالمحددات . ولقد استخدمت المدخل التقليدى للترتيبات وفى اعتقادى أن هذا أقل تجريداً من المدخل بواسطة n من الصيغ الخطية المتبادلة ويعطى الطالب إدراكاً بديهياً لهذا الموضوع أفضل مما يعطيه التدرج الاستنتاجى .

الباب الثالث : يقدم المتجهات فى الفضاء الثنائى والفضاء الثلاثى كأسهم ويطور الهندسة التحليلية للمستقيمات والمستويات فى الفضاء الثلاثى ويمكن حذف هذا الباب بدون أى تأثير على متابعة الكتاب اعتماداً على خلفية الطلاب (انظر التوجيه للمحاضر الذى يلى هذه المقدمة) .

يطور البابان **الرابع والخامس** النتائج الأساسية عن الفضاءات الخطية الحقيقية محدودة الأبعاد والتحويلات الخطية . ولقد بدأت بدراسة R^n ثم تقدمت خطوة خطوة للمعنى العام للمتجه .

يتعلق **الباب السادس** بمسألة القيم الذاتية والتحويل إلى الصورة القطرية .

يعطى **الباب السابع** بعض التطبيقات للجبر الخطى فى مسائل التقريب وأنظمة المعادلات التفاضلية ومتسلسلات فورير وتصنيف القطوع المخروطية وسطوح الدرجة الثانية .

يقدم **الباب الثامن** طرق الجبر الخطى العددية ولا يتطلب مزيداً من الإمكانيات الحسابية لأن التمارين يمكن حلها بالحساب اليدوى أو باستخدام حاسب جيب . يعطى هذا الباب الطالب فهماً أساسيا لكيفية حل بعض مسائل الجبر الخطى عملياً . الكثير من الطلبة ينهون دراستهم للجبر الخطى بالاعتقاد الساذج أن القيم الذاتية تحسب عمليات بحل المعادلة المميزة . قد يرغب بعض المحاضرين فى إعطاء هذا القسم فى منهاج عن البرمجة .

وقد قدمت عدداً كبيراً من التمارين . وتبدأ كل مجموعة تمارين بتمرينات روتينية وتتقدم نحو التمارين النظرية . وإجابات جميع التمارين الحسابية معطاة فى نهاية هذا المرجع .

وحيث أنه توجد فى هذا الكتاب مادة أكثر مما يمكن تغطيته فى فصل دراسى واحد فيجب على المحاضر أن يقوم باختيار الموضوعات ، وللمساعدة فى هذا الاختيار فقد قدمت توجيها للمحاضر يلى هذه المقدمة .

ما هو الجديد فى الطبعة الثانية

لقد كان القبول الكبير للطبعة الأولى هو أكبر مكافأة ، والمؤلف شاكر للملاحظات القيمة والمقترحات البناءة التى وصلته من القراء . وبفضل هذه المقترحات أجريت التعديلات التالية :

* سرعة السير فى الباب الأول قد زادت قليلا (اختزلت ثمانية أقسام إلى سبعة) لكى تسمح بوقت إضافى لمادة أكثر صعوبة فيما بعد فى هذا المرجع .
* أعيدت كتابة بعض الأقسام الأكثر صعوبة فى البابين ٥ ، ٦ وأعيد تنظيمهما لكى تصبح أفكارهما أكثر وضوحاً .
* أضيف باب عن التطبيقات وأعد ملحق اختيارى غير مجلد مخصص لتطبيقات إضافية .
* أضيفت بعض التمارين الجديدة إلى مجموعات التمارين المختارة .

توجيه للمحاضر

يمكن حذف الباب الثالث بدون تأثير على تتبع الكتاب إذا كان الطلاب قد درسوا مسبقا المستقيمات والمستويات والمتجهات الهندسية فى الفضاء الثنائى وفى الفضاء الثلاثى . تبعا للوقت المسموح به والخلفية الطلبة قد يرغب المحاضر فى إضافة كل أو جزء من هذا الباب إلى المادة الأساسية المقترحة التالية :

الباب الأول	٧ محاضرات
الباب الثانى	٥ محاضرات
الباب الرابع	١٤ محاضرة
الباب الخامس	٦ محاضرات
الباب السادس	٥ محاضرات

ويعتبر هذا التقسيم رحباً فهو يسمح بقدر كاف من وقت المحاضرة لمناقشة تمارين الواجبات المنزلية . ولكنه يفترض أيضاً أن وقتاً قليلا من المحاضرة قد خصص للمادة التى أشير إليها « اختيارى » ، ويمكن للمحاضر أن يضيف على هذه المادة الأساسية ، بقدر ما يسمح به الوقت ، بعض المحاضرات من المادة الاختيارية ، الباب الثالث ، الباب السابع والباب الثامن .

ويمكن للمحاضرين الذين يرغبون فى وقت إضافى لمناقشة التطبيقات أو الطرق العددية أن يحذفوا القسمين ٥ – ٣ ، ٥ – ٤ من المادة الأساسية . إذا تم ذلك فيجب أن يحذف المحاضر المادة الاختيارية فى نهاية ٦ – ١ ثم يبدأ القسم ٦ – ٢ بصيغة المصفوفات للمسألتين ١ ، ٢ ويحذف مثال ٩ من هذا القسم .

محمد يوسف الدويش

المحتويات

(*) تطبيقات اضافية فى التجارة والاقتصاد والعلوم الطبيعية والاجتماعية موجودة فى ملحق بهذا الكتاب.

١ـ أنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات

١ ــ ١ مقدمة عن انظمة المعادلات الخطية

سنقدم فى هذا القسم المصطلحات الأساسية ونناقش إحدى طرق حل أنظمة المعادلات الخطية .

يمكن تمثيل الخط فى المستوى xy جبرياً بواسطة معادلة على الصورة التالية :

$$a_1x + a_2y = b$$

تسمى أى معادلة من هذا النوع بمعادلة خطية فى المتغيرين x ، y .

وبشكل أعم تعرف **المعادلة الخطية** فى n متغير x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n بأنها معادلة يمكن التعبير عنها بالصورة :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

حيث a_1 ، a_2 ، . . . ، a_n ، b ثوابت حقيقية .

مثـال (١) :

المعادلات التالية معادلات خطية

$$x + 3y = 7 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

لاحظ أن المعادلة الخطية لا تشمل أى حواصل ضرب أو جذور للمتغيرات . فتظهر جميع المتغيرات فى الأس الأول (القوة الأولى) ولا تظهر كدلائل لدوال مثلثية أو لوغاريتمية أو أسية . فلا تصلح المعادلات التالية أن تكون معادلات خطية .

$$x + 3y^2 = 7 \qquad 3x + 2y - z + xz = 4$$
$$y - \sin x = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

حل المعادلة الخطية $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ هو متتابعة من n من الأعداد s_1 ، s_2 . . . ، s_n تحقق المعادلة عند إجراء التعويض $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

تسمى الفئة المكونة من كل حلول المعادلة **بفئة الحل** لها .

مثال (٢) :

أوجد فئة الحل لكل من المعادلات التالية

$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5 \quad (٢) \qquad\qquad 4x - 2y = 1 \quad (١)$$

لإيجاد حلول المعادلة (١) يمكننا أن نعين قيمة اختيارية للمتغير x ونحل المعادلة لإيجاد y ، أو نختار قيمة اختيارية للمتغير y ونحل لإيجاد x إذا اتبعنا الاتجاه الأول فبتعيين قيمة اختيارية t للمتغير x نحصل على

$$x = t, \qquad y = 2t - \tfrac{1}{2}$$

تصف هاتان العبارتان فئة الحل بواسطة دليل اختيارى t . ويمكن الحصول على حلول عددية خاصة بالتعويض بقيم معينة للدليل t . على سبيل المثال تعطى $t = 3$ الحل $x = 3, y = 11/2$ ، تعطى $t = -1/2$ الحل $x = -1/2$ و $y = -3/2$.

إذا اتبعنا الاتجاه الثانى وعينا للمتغير y القيمة الاختيارية t ، نحصل على

$$x = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}, \qquad y = t$$

رغم اختلاف هذه الصورة عن تلك التى حصلنا عليها فيما سبق ، إلا أنها تعطى نفس فئة الحل بتغيير t على جميع الأعداد الحقيقية الممكنة . على سبيل المثال تعطى العبارتان السابقتان الحل $y = 11/2$ و $x = 3$ عندما $t = 3$ فى حين تعطى هذه الصورة نفس الحل عندما $t = 11/2$.

لإيجاد فئة الحل للمعادلة (٢) يمكننا أن نعين قيما اختيارية لأى متغيرين ثم نحل المعادلة لإيجاد المتغير الثالث . وبصفة خاصة إذا عينا قيما اختيارية s ، t للمتغيرين x_2 و x_3 بالترتيب ثم أجرينا الحل لإيجاد x_1 نحصل على

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = t$$

تسمى أى فئة منتهية من معادلات خطية فى المتغيرات x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n **بنظام المعادلات الخطية** . وتسمى متتابعة الأعداد s_1 ، s_2 ، . . . ، s_n **بحل** للنظام . إذا كان $x_1 = s_1$ ، $x_2 = s_2$ ، . . . ، $x_n = s_n$ حلا لكل معادلة فى هذا النظام . على سبيل المثال نظام المعادلتين فى ثلاثة مجاهيل

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

يكون لها الحل $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = -1$ حيث أن هذه القيم تحقق كلتا المعادلتين ، مع ذلك $x_1 = 1$ ، $x_2 = 8$ ، $x_3 = 1$ ليست حلا لأن هذه القيم تحقق فقط المعادلة الأولى من معادلتى النظام .

ليس لكل أنظمة المعادلات الخطية حلول . على سبيل المثال إذا ضربنا المعادلة الثانية للنظام

$$x + y = 4$$
$$2x + 2y = 6$$

فى $1/2$ يصبح واضحاً عدم وجود أى حل، حيث أن المعادلتين فى النظام الناتج

$$x + y = 4$$
$$x + y = 3$$

تناقض كل منهما الأخرى .

يسمى نظام المعادلات الذى ليس له أى حل نظاما متناقضاً **(غير متآلف)** أما إذا وجد حل واحد على الأقل فيسمى النظام نظاماً **متآلفاً** . ولتوضيح الحالات الممكنة عند حل أنظمة المعادلات الخطية ، اعتبر نظاماً لمعادلتين فى مجهولين

$a_1x + b_1y = c_1$ كلاهما ليس بصفر a_1 و b_1

$a_2x + b_2y = c_2$ كلاهما ليس بصفر a_2 و b_2

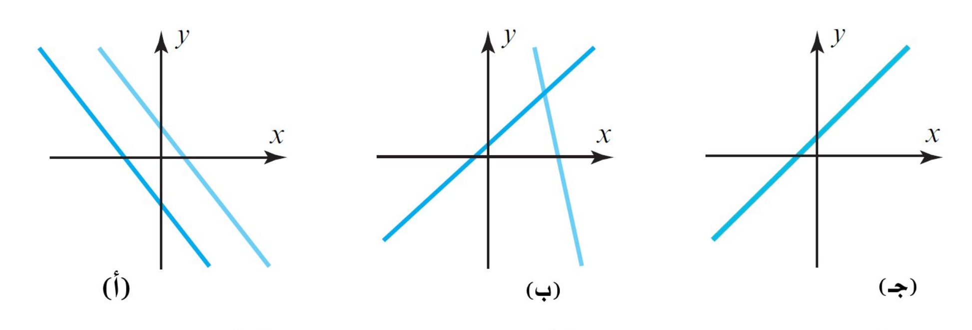
الرسم البيانى لهاتين المعادلتين خطان مستقيمان ، دعهما l_1 ، l_2 بما أن النقطة (x, y) تقع على الخط المستقيم إذا – وفقط إذا – حقق العددان x ، y معادلة الخط المستقيم ، فإن حلول نظام المعادلات سوف تناظر نقط تقاطع l_1 مع l_2 وتوجد ثلاث حالات ممكنة (انظر شكل ١ – ١)

(أ) قد يكون الخطان l_1 و l_2 متوازيين ، فى هذه الحالة لا يوجد تقاطع ، وبالتالى لا يوجد حل للنظام .

(ب) قد يتقاطع الخطان l_1 و l_2 فى نقطة واحدة فقط ، فى هذه الحالة يكون للنظام حل واحد بالضبط .

(جـ) قد ينطبق الخطان l_1 ، l_2 ، وفى هذه الحالة يوجد عدد لا نهائى من نقط التقاطع ، وبالتالى عدد لا نهائى من الحلول للنظام .

(شكل ١ –١) (أ) لا يوجد حل (ب) يوجد حل واحد
(جـ) يوجد عدد لا نهائى من الحلول



رغم أننا قد أخذنا هنا فقط معادلتين في مجهولين إلا أننا سوف نبين فيما بعد أن هذه النتيجة نفسها منطبقة على أي نظام اختياري ، بمعنى أن لكل نظام المعادلات الخطية : إما لا يوجد أي حل ، أو يوجد حل واحد أو يوجد عدد لا نهائي من الحلول .

أي نظام اختياري لعدد m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل سيكتب

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

حيث المجاهيل هي x_1 ، x_2 ، ... ، x_n و a_{ij} ، b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$) تدل على ثوابت .

على سبيل المثال ، سوف يكتب أي نظام عام لثلاث معادلات خطية في أربعة مجاهيل على الصورة

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3
\end{aligned}$$

يعتبر وضع الدليلين الثنائيين لمعاملات المجاهيل وسيلة مفيدة سوف نستخدمها لتحديد موضع المعامل في النظام . يشير الدليل الأيسر للمعامل a_{ij} إلى المعادلة التي يقع فيها المعامل ، ويشير الدليل الأيمن إلى المجهول المضروب فيه ولهذا فإن a_{12} توجد في المعادلة الأولى وتضرب في المجهول x_2 .

إذا تتبعنا – في ذهننا – مسار مواقع كل من إشارات الزائد + والمجاهيل x وعلامات التساوي فإنه يمكننا أن نوجز النظام بعدد m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل في كتابة ترتيب للأعداد على شكل مستطيل .

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}$$

يسمى هذا الترتيب بالمصفوفة الممتدة للنظام (يستخدم اللفظ « مصفوفة » في الرياضيات ليدل على ترتيبة مستطيلة من الأعداد . وتظهر المصفوفات في مقامات عديدة ، وسوف ندرسها في فصول تالية بتفصيل أوسع) .

للتوضيح فإن المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9\\
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1\\
3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0
\end{aligned}$$

هي

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 9\\
2 & 4 & -3 & 1\\
3 & 6 & -5 & 0
\end{bmatrix}$$

ملحوظة :

عند بناء أى مصفوفة ممتدة يجب كتابة المجاهيل بنفس الترتيب فى كل معادلة .

الطريقة الأساسية لحل أى نظام لمعادلات خطية هى بإحلال النظام المعطى بنظام جديد له نفس الحل ، ولكنه أسهل فى الحل . يتم الحصول – بشكل عام – على النظام الجديد فى سلسلة من الخطوات بواسطة تطبيق الأنواع الثلاثة الآتية من عمليات حذف منتظم للمجاهيل .

١ – اضرب معادلة بكاملها فى ثابت غير صفرى .

٢ – أبدل معادلتين .

٣ – أضف مضاعف معادلة لمعادلة أخرى .

بما أن الصفوف (الخطوط الأفقية) فى المصفوفة الممتدة تناظر المعادلات فى النظام القرين لها فإن هذه العمليات الثلاث تناظر العمليات الآتية على صفوف المصفوفة الممتدة .

١ – اضرب صفاً بكامله فى ثابت غير صفرى .

٢ – أبدل صفين .

٣ – أضف مضاعف صف لصف آخر .

تسمى هذه العمليات **بعمليات أولية على المصفوفة** . يوضح المثال التالى كيف يمكن استخدام هذه العمليات لحل أنظمة لمعادلات خطية . حيث أن الطريقة المنتظمة لإيجاد حلول للأنظمة سوف تشتق فى القسم التالى ، فليس من الضرورى الانشغال بكيفية انتقاء الخطوات فى هذا المثال . يجب أن يخصص الجهد الأساسى فى هذا الوقت لفهم الحسابات والمناقشة .

مثال (٣) :

فى أسفل العمود الأيمن نحل نظاماً لمعادلات خطية بواسطة عمليات على المعادلات فى النظام ، وفى العمود الأيسر نحل نفس النظام بواسطة عمليات على صفوف المصفوفة الممتدة

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 2 – ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثانية لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

اضرب الصف الأول فى 2 – ثم أضف الناتج إلى الصف الثانى لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الأولى فى 3 − ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

اضرب الصف الأول فى 3 − ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الثانية فى 1/2 لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

اضرب الصف الثانى فى 1/2 لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الثانية فى 3 − ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثالثة لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

اضرب الصف الثانى فى 3 − ثم أضف الناتج إلى الصف الثالث لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الثالثة فى 2 − لتحصل على

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

اضرب الصف الثالث فى 2− لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الثانية فى 1 − ثم أضف الناتج إلى المعادلة الأولى لتحصل على

$$\begin{aligned} x \qquad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

اضرب الصف الثانى فى 1 − ثم أضف الناتج إلى الصف الأول لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اضرب المعادلة الثالثة فى $-\frac{11}{2}$ ثم أضف الناتج إلى المعادلة الأولى واضرب المعادلة الثالثة فى $\frac{7}{2}$ ثم أضف الناتج إلى المعادلة الثانية لتحصل على

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

اضرب الصف الثانى فى $-\frac{11}{2}$ ثم أضف الناتج إلى الصف الأول واضرب الصف الثالث فى $\frac{7}{2}$ ثم أضف الناتج إلى الصف الثانى لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3$$

واضحاً الآن .

تمارين ١ — ١

١ – أي من المعادلات الآتية يعتبر معادلات خطية في x_1 ، x_2 ، x_3 :

(أ) $x_1 + 2x_1x_2 + x_3 = 2$

(ب) $x_1 + x_2 + x_3 = \sin k$ (k ثابت)

(جـ) $x_1 - 3x_2 + 2x_3^{1/2} = 4$

(د) $x_1 = \sqrt{2}x_3 - x_2 + 7$

(هـ) $x_1 + x_2^{-1} - 3x_3 = 5$

(و) $x_1 = x_3$

٢ – أوجد فئة الحل لكل من المعادلات الآتية :

(أ) $6x - 7y = 3$

(ب) $2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 8$

(جـ) $-3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 5$

(د) $2v - w + 3x + y - 4z = 0$

٣ – أوجد المصفوفة الممتدة لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

(أ)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= 2 \\ 2x_3 + x_4 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

٤ – أوجد نظام معادلات خطية مناظراً لكل من المصفوفات الممتدة الآتية :

(أ)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(جـ)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(د)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

٥ – لأي قيمة (قيم) للثابت k يكون للنظام الآتي : عدد لا نهائي من الحلول ؟ حل واحد بالضبط ؟ لا يوجد أي حل ؟

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

٦ – باعتبار نظام المعادلات

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= m \end{aligned}$$

ادرس الأوضاع النسبية للخطوط المستقيمة $ax + by = k$ ، $cx + dy = l$ ، $ex + fy = m$ عندما :

(أ) لا يوجد للنظام أي حل

(ب) يوجد للنظام حل واحد بالضبط

(جـ) يوجد للنظام عدد لا نهائي من الحلول

٧ – بين أنه إذا كان نظام المعادلات الخطية فى تمرين ٦ متآلفاً فيمكن إسقاط معادلة واحدة على الأقل دون تغيير فئة الحل .

٨ – بين أن النظام فى تمرين ٦ يجب أن يكون متآلفاً إذا وضعنا $k = l = m = 0$ ماذا يمكن أن يقال عن نقطة تقاطع المستقيمات الثلاثة إذا كان للنظام حل واحد بالضبط ؟

٩ – باعتبار نظام المعادلات .

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= a \\
x \quad\;\; + z &= b \\
2x + y + 3z &= c
\end{aligned}
$$

بين أنه لكى يكون هذا النظام متآلفاً يجب أن تحقق a ، b ، c الشرط $c = a + b$.

١٠ – أثبت أنه إذا كان للخطين المستقيمين $x_1 + kx_2 = c$ ، $x_1 + lx_2 = d$ نفس فئة الحل فإن المعادلتين معادلة واحدة بعينها .

١ — ٢ طريقة جاوس فى الاختزال

سنعطى فى هذا القسم طريقة منتظمة ، لحل أنظمة المعادلات الخطية ، موضوعة على أساس فكرة اختزال المصفوفة الممتدة إلى صورة بسيطة بشكل كاف يمكن من حل نظام المعادلات بالمعاينة .

فى الخطوة الأخيرة للمثال ٣ حصلنا على المصفوفة الممتدة والتى كان الحل واضحاً منها .

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix} \qquad (1.1)
$$

تعتبر المصفوفة ١ – ١ مثالا لمصفوفة فى الشكل الصفى المميز المختزل . لكى تكون المصفوفة على هذه الصورة يجب أن تتوفر لها الخواص التالية :

١ – إذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من أصفار ، فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفرى فى الصف (يسمى هذا العنصر بالواحد المتقدم) .

٢ – إذا وجدت أى صفوف مكونة بكاملها من أصفار لتجمع معاً فى قاع المصفوفة .

٣ – فى أى صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يوجد الواحد المتقدم فى الصف الأسفل أيمن الواحد المتقدم فى الصف الأعلى .

٤ – يكون بالعمود المحتوى على واحد متقدم أصفار فى كل مكان عدا هذا العنصر .

تسمى المصفوفة المتوفر لها الخواص ١ ، ٢ ، ٣ بمصفوفة فى الشكل الصفى المميز .

مثـــال (٤) :

المصفوفات الآتية فى الشكل الصفى المميز المختزل

$$\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

والمصفوفات الآتية فى الشكل الصفى المميز .

$$\begin{bmatrix}1&4&3&7\\0&1&6&2\\0&0&1&5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&2&6&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

على القارىء أن يتحقق من كون المصفوفات السابقة تحقق كل المتطلبات اللازمة .

ملحوظة : ليس من الصعب أن نرى أن أي مصفوفة فى الشكل الصفى المميز تحوى أصفاراً تحت كل واحد متقدم (انظر مثال ٤) . وفى المقابل يجب أن تحوى المصفوفة فى الشكل الصفى المميز المختزل أصفاراً أعلى وأسفل الواحد المتقدم .

إذا وضعت المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات الخطية – بواسطة متتالية من عمليات أولية على الصفوف – فى الشكل الصفى المميز المختزل – فيمكن الحصول على فئة الحل للنظام بالمعاينة أو على أسوأ حال بعد قليل من الخطوات البسيطة .

ويوضح المثال الآتى هذه النقطة .

مثـــال (٥) :

افترض أن المصفوفة الممتدة لنظام ما من المعادلات الخطية قد اختزل بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصفى المميز المختزل المعطى على الصورة :

(أ) $\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&4\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1&0&0&4&-1\\0&1&0&2&6\\0&0&1&3&2\end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix}1&6&0&0&4&-2\\0&0&1&0&3&1\\0&0&0&1&5&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

حل كل نظام

حل (أ) : نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned}x_1 \quad\quad &= 5\\ x_2 \quad &= -2\\ x_3 &= 4\end{aligned}$$

نجد بالمعاينة أن $x_1 = 5$ ، $x_2 = -2$ ، $x_3 = 4$

حل (ب) : نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4x_4 &= -1 \\ x_2 \quad + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

تسمى x_1 ، x_2 ، x_3 بالمتغيرات المتقدمة حيث أنها تناظر الآحاد المتقدمة ويعطى الحل للمتغيرات المتقدمة بدلالة x_4 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 3x_4 \end{aligned}$$

نحصل على عدد لانهائى من الحلول حيث أن x_4 يمكن أن تعطى قيمة اختيارية ولتكن t وتعطى فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -1 - 4t, \qquad x_2 = 6 - 2t, \qquad x_3 = 2 - 3t, \qquad x_4 = t$$

حل (جـ) : نظام المعادلات المنـــاظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad + 4x_5 &= -2 \\ x_3 \quad + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

وتكون x_1 ، x_3 ، x_4 المتغيرات المتقدمة هنا . ويعطى الحل للمتغيرات المتقدمة بدلالة المتغيرات الباقية

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 4x_5 - 6x_2 \\ x_3 &= 1 - 3x_5 \\ x_4 &= 2 - 5x_5 \end{aligned}$$

يوجد عدد لانهائى من الحلول حيث أن x_5 يمكن أن تعطى قيمة اختيارية t وأيضاً x_2 يمكن أن تعطى قيمة اختيارية s ، وتعطى فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -2 - 4t - 6s, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = 1 - 3t, \qquad x_4 = 2 - 5t, \qquad x_5 = t$$

حل (د) : المعادلة الأخيرة فى نظام المعادلات المناظر هى

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

حيث أن هذه المعادلة لايمكن أن تتحقق . إذن لايوجد حل للنظام .

لقد رأينا منذ قليل كيف أنه من السهل حل نظام لمعادلات خطية متى كانت مصفوفتها الممتدة فى الشكل الصفى المميز المختزل . سنعطى الآن طريقة الحذف خطوة خطوة ، المعروفة **بطريقة جاوس – جوردان للحذف** *، والتى يمكن استخدامها لاختزال أى مصفوفة إلى مصفوفة فى الشكل الصفى المميز المختزل . ونحن ننص على كل خطوة ، لتوضيح الفكرة ، باختزال المصفوفة الآتية إلى الشكل الصفى المميز المختزل

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

خطوة (١) : عين أقصى عمود (خط رأسى) إلى اليسار ، لاتكون عناصره بكاملها أصفاراً

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

اقصى عمود غير صفرى الى اليسار ←

خطوة (٢) : ابدل الصف الأعلى مع صف آخر ، إذا لزم ذلك ، لكى يكون العدد المدخل عند قمة العمود المشار إليه فى خطوة (١) مختلفاً عن الصفر .

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

لقد ابدل الصفان الأول والثانى فى المصفوفة السابقة .

خطوة (٣) : إذا كان العدد a هو المدخل الموجود الآن على قمة العمود المشار إليه فى خطوة ١ ، فاضرب الصف الأول فى $1/a$ لكى يظهر واحد متقدم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

لقد ضرب الصف الاول للمصفوفة السابقة فى 1/2

خطوة (٤) : أضف مضاعفات مناسبة للصف الأعلى إلى الصفوف التى تحته بحيث تصبح العناصر تحت الواحد المتقدم أصفاراً .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

اضف الى الصف الثالث حاصل ضرب 2- فى الصف الاول للمصفوفة السابقة .

(*) كارل فردريك جاوس (١٧٧٧ — ١٨٥٥) يسمى احيانا امير الرياضيين. اسهم جاوس اسهامات متعمقة فى نظرية الاعداد ونظرية الدوال والاحتمالات والاحصاء . واكتشف طريقة لحساب مسارات النجميات واكتشف اكتشافات أساسية فى النظرية الكهرومغناطيسية واخترع تلغرافا .

كاميل جوردان (١٨٣٨ — ١٩٢٢) . كان جوردان استاذا بمعهد الصناعات بباريس وقد عمل اعمالا رائدة فى فروع متعددة من الرياضيات بما فى ذلك نظرية المصفوفات . وهو بصفة خاصة مشهور بسبب « نظرية جوردان للمنحنى » التى تنص على ان اى منحنى بسيط مقفل (مثل الدائرة او المربع) يقسم المستوى الى منطقتين منفصلتين غير متقاطعتين .

خطوة (٥) : اهمل الآن الصف الأعلى للمصفوفة (وذلك بتغطيته مثلا) وأبدأ مرة أخرى بتطبيق الخطوة الأولى على المصفوفة الجزئية التي تبقى . واصل في هذا الطريق حتى تصير المصفوفة التامة (الأصلية) في الشكل الصفي المميز .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

اقصى الاعمدة غير الصفرية يسارا في المصفوفة الجزئية .

لقد ضرب الصف الأول للمصفوفة الجزئية في 1/2- ليظهر واحد متقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

لقد أضيف الى الصف الثاني للمصفوفة الجزئية حاصل ضرب الصف الأول للمصفوفة الجزئية في 5- ليظهر صفر تحت الواحد المتقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

تم تغطية الصف الاعلى للمصفوفة الجزئية وعدنا مرة أخرى للخطوة ١

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

اقصى الاعمدة غير الصفرية يسار في المصفوفة الجزئية الجديدة .

لقد ضرب الصف الأول (والوحيد) للمصفوفة الجزئية الجديدة في 2 ليظهر واحد متقدم .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة التامة (الأصلية) الآن في الشكل الصفي المميز . لإيجاد الشكل الصفي المميز المختزل نحتاج إلى الخطوة الإضافية التالية .

خطوة (٦) : بالبدء بالصف غير الصفري الأخير وبالعمل لأعلى ، اضف مضاعفات مناسبة لكل صف إلى الصفوف التي تعلوه لتظهر أصفار فوق الآحاد المتقدمة

لقد أضيف الى الصف الثاني حاصل ضرب الصف الثالث للمصفوفة السابقة في 7/2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لقد أضيف الى الصف الاول حاصل ضرب الصف الثالث في 6-

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لقد أضيف الى الصف الأول حاصل ضرب الصف الثانى في 5

وتكون المصفوفة الأخيرة فى الشكل الصفى المميز المختزل .

مثال (٦) :

حل بطريقة جاوس – جوردان الحذف نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

المصفوفة الممتدة لهذا النظام هى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

إضافة حاصل ضرب الصف الأول فى 2 – إلى الصفين الثانى والرابع تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

ضرب الصف الثانى فى 1 – ثم إضافة حاصل ضرب الصف الثانى فى 5 – إلى الصف الثالث وحاصل ضرب الصف الثانى فى 4 – إلى الصف الرابع تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

تبديل الصفين الثالث والرابع ثم ضرب الصف الثالث للمصفوفة الناتجة فى 1/6 يعطى الشكل الصفى المميز

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إضافة حاصل ضرب الصف الثالث فى 3 − إلى الصف الثانى ثم إضافة ضعف الصف الثانى للمصفوفة الناتجة إلى الصف الأول تعطى الشكل الصفى المميز المختزل

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

(لقد أهملنا المعادلة الأخيرة $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0 + 0x_6 = 0$ لأنها سوف تتحقق تلقائياً بحل المعادلات المتبقية)

بالحل للمعادلات المتقدمة ، نحصل على

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

إذا أعطينا المتغيرات x_2 ، x_4 ، x_5 ، القيم الاختيارية r ، s ، t ، على الترتيب فإننا نحصل على فئة الحل بواسطة الصيغ

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

مثـــال (٧) :

غالباً مايكون من الأنسب لحل نظام من المعادلات الخطية أن نأتى بالمصفوفة الممتدة إلى الشكل الصفى المميز دون مواصلة كل الطريق إلى الشكل الصفى المميز المختزل . عندما يتم ذلك يمكن حل النظام المناظر للمعادلات الخطية بأسلوب يسمى **بالتعويض الخلفى** . سنوضح هذه الطريقة باستخدام نظام المعادلات فى مثال ٦ .

من حسابات مثال ٦ ، يكون مايلى شكلا صفياً مميزاً للمصفوفة الممتدة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل نظام المعادلات المناظر

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

نستمر كما يلى :

خطوة (١) : حل المعادلات للمتغيرات المتقدمة

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

خطوة (٢) : بالبدء بالمعادلة السفلى وبالعمل إلى أعلى ، عوض بالتتابع بكل معادلة فى جميع المعادلات أعلاها .

التعويض بالمعادلة $x_6 = 1/3$ فى المعادلة الثانية يعطى

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

التعويض بالمعادلة $x_3 = -2x_4$ فى المعادلة الأولى يعطى

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

خطوة (٣) : اعط قيما اختيارية للمتغيرات غير المتقدمة .

إذا أعطينا المتغيرات x_2 ، x_4 ، x_5 القيم الاختيارية r ، s ، t على الترتيب فإن الحل يعطى بواسطة الصيغ الآتية :

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

ويتفق هذا مع الحل الذى حصلنا عليه فى مثال (٦) .

تسمى طريقة حل أنظمة المعادلات الخطية بواسطة اختزال المصفوفة الممتدة إلى شكل صفى مميز **بطريقة جاوس للحذف** .

ملحوظة : الطريقة التى أعطيناها لاختزال مصفوفة إلى شكل صفى مميز أو شكل صفى مميز مختزل مناسبة تماماً لتنفيذها على الحاسب الألكترونى ، لأنها طريقة منتظمة . ولكن هذه الطريقة تظهر أحياناً كسوراً يجب تجنبها وذلك بتغيير الخطوات فى الاتجاه الصحيح . طالما يتم إتقان الطريقة الأساسية قد يرغب القارىء تغيير الخطوات فى مسائل معينة ليتجنب الكسور (انظر تمرين ١٣) . يمكن إثبات - رغم أننا لن نفعل ذلك ، أنه مهما اختلفت العمليات الأولية على الصفوف فإننا نصل دائماً إلى نفس الشكل الصفى المميز المختزل . بمعنى آخر ، يكون الشكل الصفى المميز المختزل وحيداً . ولكن الشكل الصفى المميز ليس وحيداً ، فيمكن الوصول إلى شكل صفى مميز مختلف بتغيير متتابعة العمليات الأولية على الصفوف (انظر تمرين ١٤) .

تمارين ١ — ٢

١ – أى من المصفوفات التالية فى الشكل الصفى المميز المختزل ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

٢ – أى من المصفوفات التالية فى شكل صفى مميز ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٣ – اعتبر فى كل جزء أن المصفوفة الممتدة لنظام من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصفى المميز المختزل المعطى . حل النظام .

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٤ – اعتبر فى كل جزء أن المصفوفة الممتدة لنظام من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصفى المميز المعطى . حل النظام .

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٥ – حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس – جوردان للحذف .

(أ)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 &= 0 \end{aligned}$$

٦ – حل كلا من الأنظمة فى تمرين ٥ بطريقة جاوس للحذف .

٧ – حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس – جوردان للحذف .

(أ)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 11x_1 + 7x_2 \qquad &= -30 \end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$$

٨ – حل كلا من الأنظمة فى تمرين ٧ بطريقة جاوس للحذف .

٩ – حل كلا من الأنظمة الآتية بطريقة جاوس – جوردان للحذف .

(أ)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

١٠ – حل كلا من الأنظمة فى تمرين ٩ بطريقة جاوس للحذف .

١١ – حل الأنظمة الآتية ، حيث a ، b ، c ثوابت .

(أ)
$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

١٢ – لأى قيمة للثابت a يوجد للنظام الثانى : حل واحد بالضبط ؟ يوجد عدد لانهائى من الحلول ؟ لايوجد أى حل ؟

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

١٣ – اختزل

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الصفى المميز المختزل بدون إظهار أى كسر .

١٤ – أوجد شكلين صفيين مميزين مختلفين للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

١٥ – حل النظام التالي من المعادلات غير الخطية ، بالنسبة للمجاهيل α ، β ، γ حيث $0 \le \alpha \le 2\pi$ و $0 \le \beta \le 2\pi$ و $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

١٦ – صف الأشكال الصفية المميزة المختزلة الممكنة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

١٧ – أثبت أنه إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فإن الشكل الصفي المميز للمصفوفة

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٨ – استخدم تمرين ١٧ لتثبت أنه إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فيوجد للنظام

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

حل واحد بالضبط .

١ – ٣ الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية

يوجد لكل نظام من أنظمة المعادلات الخطية ، كما أشرنا من قبل ، إما حل واحد أو عدد لانهائي من الحلول ، أو لايوجد أي حل على الإطلاق . عندما نتقدم ، سوف نجد حالات لانهتم فيها بإيجاد حلول لنظام معطى ، بقدر ما نكرس اهتمامنا بتقرير عدد الحلول للنظام . نعطي في هذا القسم حالات مختلفة يمكن فيها تقرير عدد الحلول بالمعاينة .

نظام المعادلات الخطية يسمى متجانساً إذا كانت كل الحدود الثابتة أصفاراً ، بمعنى أن النظام على الصورة

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

جميع الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية متآلفة لأن $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، ... ، $x_n = 0$ هي دائماً حل . يسمى هذا الحل بالحل التافه ، وإذا وجدت حلول أخرى فتسمى هذه الحلول بالحلول غير التافهة .

حيث إن أي نظام متجانس من المعادلات الخطية يجب أن يكون متآلفاً ، فيوجد للنظام إما حل واحد أو عدد لانهائي من الحلول . حيث إن حلا منهما يكون تافهاً .

يمكننا أن نقرر التالي :

تتحقق لأي نظام متجانس من المعادلات الخطية إحدى المقولتين التاليتين :

١ – يوجد للنظام الحل التافه فقط .

٢ – يوجد للنظام عدد لانهائي من الحلول غير التافهة بالإضافة إلى الحل التافه .

توجد حالة واحدة يتأكد عندها وجود حل غير تافه للنظام المتجانس ، بالتحديد ، عندما يحوي النظام مجاهيل أكثر من المعادلات . لرؤية السبب ، ندرس المثال التالي لأربع معادلات في خمسة مجاهيل .

مثـــال (٨) :

حل النظام المتجانس التالي للمعادلات الخطية بطريقة جاوس – جوردان الحذف

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

المصفوفة الممتدة للنظام هي

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اختزل المصفوفة إلى الشكل الصفي المميز المختزل لتحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فيكون نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_3 \quad + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

الحل للمجاهيل المتقدمة يعطى

$$x_1 = -x_2 - x_5$$
$$x_3 = -x_5$$
$$x_4 = 0$$

وإذن تعطى فئة الحل بواسطة

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

لاحظ أننا نحصل على الحل التافه عندما $s = t = 0$.

يوضح مثال ٨ نقطتين هامتين عن حل الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية . أولا ، أى من العمليات الثلاث الأولية على الصفوف لايمكن أن تغير العمود الأخير للأصفار فى المصفوفة الممتدة ، ولذلك فنظام المعادلات المناظر للمصفوفة الممتدة فى الشكل الصفى المميز المختزل يجب أن يكون أيضاً نظاماً متجانساً . (انظر النظام 1.3 فى مثال ٨) . ثانياً اعتماداً على التواجد من عدمه لصفوف صفرية فى الشكل الصفى المميز المختزل للمصفوفة الممتدة ، يكون عدد المعادلات فى النظام المختزل أقل أو مساوياً لعدد المجاهيل فى النظام الأصلى (قارن النظامين 1.2 و 1.3 فى مثال ٨) . لذلك إذا كان للنظام المتجانس المعطى عدد m من المعادلات فى عدد n من المجاهيل بحيث كانت $m < n$ ، وإذا وجد عدد r من الصفوف غير الصفرية فى الشكل الصفى المميز المختزل للمصفوفة الممتدة فإنه يكون $r < n$ ، وعليه فإن نظام المعادلات المناظر للمصفوفة الممتدة فى الشكل الصفى المميز المختزل سيكون على الصورة

$$\begin{array}{lr} \cdots x_{k_1} \qquad\qquad + \Sigma(\ ) = 0 \\ \qquad \cdots x_{k_2} \qquad + \Sigma(\ ) = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{k_r} + \Sigma(\ ) = 0 \end{array} \tag{1.4}$$

حيث $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ هى المتغيرات المتقدمة ، $\Sigma(\ )$ ترمز إلى التجميعات التى تحوى العدد $n - r$ من المتغيرات الباقية . الحل للمتغيرات المتقدمة يعطى

$$x_{k_1} = -\Sigma(\ )$$
$$x_{k_2} = -\Sigma(\ )$$
$$\vdots$$
$$x_{k_r} = -\Sigma(\ )$$

كما فى مثال ٨ ، يمكننا إعطاء قيم اختيارية للمجاهيل فى الطرف الأيمن وبهذا نحصل على عدد لانهائى من الحلول للنظام .

تلخيصاً لما سبق لدينا النظرية الهامة الآتية :

نظرية ١ : يوجد دائماً عدد لانهائى من الحلول للنظام المتجانس من المعادلات الخطية الذى فيه عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات .

تمارين ١ — ٣

١ – دون استخدام ورقة وقلم ، حدد لأى من الأنظمة المتجانسة التالية توجد حلول غير تافهة .

(أ)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

فى التمارين من ٢ إلى ٥ حل المعطى من الأنظمة المتجانسة للمعادلات الخطية .

٢ –
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

٣ –
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٤ –
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٥ –
$$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

٦ – لأى قيمة (قيم) للثابت λ توجد حلول غير تافهة للنظام .

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

٧ – باعتبار نظام المعادلات

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

ناقش الأوضاع النسبية للخطوط $ax + by = 0$ ، $cx + dy = 0$ ، $ex + fy = 0$ عندما

(أ) يوجد للنظام الحل التافه فقط

(ب) يوجد للنظام حلول غير تافهة

٨ – باعتبار النظـــام

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

(أ) بين أنه إذا كان $x = x_0$ ، $y = y_0$ أى حل و k أى ثابت فإن $x = kx_0$ ، $y = ky_0$ أيضاً حل .

(ب) بين أنه إذا كان $x = x_0$ ، $y = y_0$ و $x = x_1$ ، $y = y_1$ أى حلين فإن $x = x_0 + x_1$ و $y = y_0 + y_1$ أيضاً حل .

٩ – باعتبار أنظمة المعادلات

$$\text{(II)}\ ax + by = 0 \qquad \text{(I)}\ ax + by = k$$
$$cx + dy = 0 \qquad cx + dy = l$$

(أ) بين أنه إذا كان $x = x_1$ ، $y = y_1$ و $x = x_2$ ، $y = y_2$ حلين للنظام I فإن $x = x_1 - x_2$ ، $y = y_1 - y_2$ حل للنظام .

(ب) بين أنه إذا كان $x = x_1$ ، $y = y_1$ حلا للنظام I وكان $x = x_0$ ، $y = y_0$ حلا للنظام II فإن $x = x_1 + x_0$ ، $y = y_1 + y_0$ حل للنظام I .

١٠ – (أ) فى نظام المعادلات الخطية المرقم (1.4) ، بين أنه يكون من الخطأ الرمز إلى المتغيرات المتقدمة بالرموز x_1 ، x_2 ، . . . ، x_r ، بدلا من $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ كما فعلنا من قبل .

(ب) نظام المعادلات المرقم (1.3) حالة خاصة من (1.4) ماقيمة r فى هذه الحالة ؟ ماذا تكون $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ فى هذه الحالة ؟ أكتب المجاميع التى رمزنا لها بالرمز ( ) Σ فى (1.4) .

١ – ٤ المصفوفات والعمليات عليها

تظهر الترتيبة المستطيلة للأعداد الحقيقية فى مقامات كثيرة غير تلك التى تظهر فيها كمصفوفات ممتدة لأنظمة معادلات خطية . فى هذا القسم تعتبر مثل هذه الترتيبات أشياء قائمة بذاتها وننشىء بعض خواصها للاستفادة بها فى عملنا القادم .

تعريف : المصفوفة هى ترتيبة مستطيلة للأعداد . والأعداد فى الترتيبة تسمى عناصر المصفوفة .

مثـال (٩) :

تعتبر التكوينات التالية مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3] \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [4]$$

تبين هذه الأمثلة أن المصفوفات تختلف فى نوعها . يوصف نوع المصفوفة بذكر عدد الصفوف (الخطوط الأفقية) والأعمدة (الخطوط الرأسية) التى توجد فى المصفوفة . للمصفوفة اليسرى فى مثال ٩ ثلاثة صفوف وعمودان، وبالتالى تكون من النوع 3×2 . يشير العدد الأيسر دائماً إلى عدد الصفوف والعدد الأيمن يشير إلى عدد الأعمدة . المصفوفات المتبقية فى مثال ٩ تكون من الأنواع 4×1، 3×3، 1×2، 1×1 وذلك بالتتابع من اليسار . سوف نستخدم الحروف الكبيرة (A ، B ، . . . ، مثلا) لنرمز للمصفوفات ، ونستخدم الحروف الصغيرة لنرمز للمقادير العددية . فقد نكتب

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

من الشائع عند دراسة المصفوفات الإشارة إلى المقادير العددية بأنها **أعداد قياسية** . فى هذا النص ستكون كل أعدادنا القياسية أعداداً حقيقية .

إذا كانت A مصفوفة فنستخدم a_{ij} لنرمز إلى العنصر الذى فى الصف i والعمود j للمصفوفة A . وعلى ذلك يمكن كتابة المصفوفة العامة من النوع 3×4 على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

من الطبيعى إذا استخدمنا B لنرمز للمصفوفة فإننا نستخدم b_{ij} للعنصر فى الصف i والعمود j . وعلى ذلك يمكن كتابة المصفوفة العامة من النوع $m \times n$ على الصورة .

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A التى بها n من الصفوف ، n من الأعمدة هى **مصفوفة مربعة من النوع** $n \times n$ والعناصر a_{11} ، a_{22} ، . . . ، a_{nn} يقال إنها على **القطر الرئيسى** للمصفوفة A (انظر شكل ١ – ٢) .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

(شكل ١ – ٢)

لقد استخدمنا المصفوفات فيما سبق لاختصار العمل فى حل أنظمة المعادلات الخطية . لكن لأجل تطبيقات أخرى يكون من المرغوب فيه أن ننشئ « حسابا للمصفوفات » فيه يمكن إضافة وضرب المصفوفات بطريقة مفيدة . الجزء المتبقى من هذا القسم سيخصص لإنشاء هذا الحساب .

تسمى المصفوفتان **متساويتان** إذا كانتا من نفس النوع وتساوت العناصر المتناظرة فى المصفوفتين .

مثـــال (١٠) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا $A \neq C$ حيث إن A و C ليستا من نفس النوع ، لنفس السبب $B \neq C$. أيضاً $A \neq B$ حيث أن ليست كل العناصر المتناظرة متساوية .

تعريف : إذا كانت المصفوفتان A و B من نوع واحد ، فيكون المجموع $A + B$ هو المصفوفة التى نحصل عليها بجمع العناصر المتناظرة فى المصفوفتين . لا يمكن جمع مصفوفتين من نوعين مختلفين .

مثـال (١١) :

باعتبار المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

فى حين يكون كل من $A + C$ ، $B + C$ غير معرف .

تعريف : إذا كانت A أى مصفوفة وكان c أى عدد قياسى فيكون **حاصل ضرب** cA هو المصفوفة الناتجة بضرب كل عنصر للمصفوفة A فى c .

مثـال (١٢) :

إذا كانت A هى المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت B أى مصفوفة ، فإن $-B$ سترمز لحاصل الضرب $(-1)B$.

إذا كانت المصفوفتان A ، B من نوع واحد فتعرف المصفوفة $A - B$ على أنها المجموع $A + (-B) = A + (-1)B$.

مثـال (١٣) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

من التعاريف السابقة ينتج أن

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

و

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $A - B$ يمكن الحصول عليها مباشرة بطرح عناصر B من العناصر المناظرة للمصفوفة A .

عرفنا فيما سبق ، ضرب مصفوفة فى عدد قياسى . والسؤال الثانى إذن هو كيف نضرب مصفوفتين فى بعضهما ؟ ربما يبدو من الطبيعى جداً أن يكون التعريف هو . . « اضرب العناصر المتناظرة فى بعضها » مما يثير الدهشة أن هذا التعريف لن يكون مفيداً فى أغلب المسائل . وقد قادت التجربة الرياضيين إلى التعريف التالى لضرب المصفوفات وهذا التعريف أقل بداهة لكنه ذا فائدة أكبر .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times r$ و B مصفوفة من النوع $r \times n$ فيكون حاصل الضرب AB هو المصفوفة من النوع $m \times n$ والتى تحدد عناصرها كما يلى :

لإيجاد العنصر فى الصف i والعمود j للمصفوفة AB ، استخرج على حدة كلا من الصف i من المصفوفة A والعمود j من المصفوفة B . اضرب العناصر المتناظرة من الصف والعمود فى بعضها ثم اجمع حواصل الضرب الناتجة .

مثال (١٤) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×4 فيكون حاصل الضرب AB مصفوفة من النوع 2×4 على سبيل المثال لتعيين العنصر فى الصف الثانى والعمود الثالث للمصفوفة AB ، نستخرج على حدة الصف الثانى من A والعمود الثالث من B ، ثم نضرب كما أوضحنا ، العناصر المتناظرة فى بعضها ونجمع حواصل الضرب الناتجة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

يحسب العنصر فى الصف الأول والعمود الرابع للمصفوفة AB كما يلى :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

وتكون الحسابات للعناصر المتبقية هى

$$\begin{aligned} (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) &= 12 \\ (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) + (4 \cdot 7) &= 27 \\ (1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 5) &= 30 \\ (2 \cdot 4) + (6 \cdot 0) + (0 \cdot 2) &= 8 \\ (2 \cdot 1) - (6 \cdot 1) + (0 \cdot 7) &= -4 \\ (2 \cdot 3) + (6 \cdot 1) + (0 \cdot 2) &= 12 \end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

يتطلب تعريف ضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة العامل الأيسر A هو نفس عدد صفوف العامل الأيمن B لكى يتشكل حاصل الضرب AB . إذا لم يتحقق هذا الشرط فلن يعرف حاصل الضرب . وطريقة ملائمة لتحديد ما إذا كان ضرب مصفوفتين معرفاً أم لا هى الطريقة التالية . نكتب نوع العامل الأيسر وعلى يمينه نكتب نوع العمل الأيمن . إذا كان العددان الداخليان متساويين ، كما فى شكل ١ – ٣ ، فيكون الضرب معرفا ، والعددان الخارجيان يعطيان نوع حاصل الضرب .

$$\underset{m \times r}{A} \quad \underset{r \times n}{B} = \underset{m \times n}{AB}$$

الداخل

الخارج

(شكل ١ – ٣)

مثال (١٥) :

افترض أن A مصفوفة من النوع 4×3 ، B مصفوفة من النوع 7×4 ، C مصفوفة من النوع 3×7 فيعرف حاصل الضرب AB ويكون مصفوفة من النوع 7×3 ، ويعرف CA ويكون مصفوفة من النوع 4×7 ويعرف BC ويكون مصفوفة من النوع 3×4 حواصل الضرب AC ، CB ، BA غير معروفة .

مثال (١٦) :

إذا كانت A مصفوفة عامة من النوع $m \times r$ و B مصفوفة عامة من النوع $r \times n$ فإن العنصر فى الصف i والعمود j كما يتبين من التظليل أدناه يعطى بالصيغة

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

لضرب المصفوفات تطبيق هام على أنظمة المعادلات الخطية . اعتبر أى نظام لعدد m من المعادلات الخطية فى n مجهولا .

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

حيث إن أى مصفوفتين تكونان متساويتين إذا وفقط إذا كانت العناصر المتناظرة متساوية فيمكننا إبدال المعادلات ذات العدد m فى هذا النظام بمعادلة مصفوفات واحدة

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

المصفوفة من النوع $m \times 1$ التى فى الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمكن كتابتها كحاصل ضرب لتعطى

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

إذا ميزنا هذه المصفوفات بالرموز A ، X ، B على الترتيب فإن النظام الأصلى لعدد m من المعادلات فى n من المجاهيل يكون قد استبدل بمعادلة المصفوفات الواحدة .

$$AX = B \qquad (1.5)$$

سنخصص جزءا من عملنا القادم لحل معادلات المصفوفات مثل هذه لحصول على مصفوفة المجاهيل X . نتيجة لهذا الاتجاه فى المصفوفات ، سنحصل على طريقة جديدة ومجدية لحل أنظمة المعادلات الخطية . تسمى المصفوفة A فى 1.5 **مصفوفة المعاملات** للنظام .

مثال (١٧) :

فى بعض الأوقات يكون من المفيد أن نكون قادرين على إيجاد صف أو عمود معينين فى حاصل الضرب AB دون حساب حاصل الضرب بأكمله . سوف نترك ذلك كمسألة لتوضيح أن عناصر العمود j من AB هى حاصل الضرب AB_j ، حيث B_j هى المصفوفة المكونة من العمود j فقط للمصفوفة B على ذلك إذا كانت A و B المصفوفتين فى مثال ١٤ ، فيمكن الحصول على العمود الثانى من AB بواسطة الحساب

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

العمود الثانى من B ↑ ، العمود الثانى من AB ↑

بالمثل فعناصر الصف i من AB هى عناصر حاصل الضرب A_iB ، حيث A_i هى المصفوفة المكونة من الصف i فقط للمصفوفة A على ذلك يمكن الحصول على الصف الأول من حاصل الضرب AB فى مثال ١٤ بواسطة الحساب

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

الصف الأول من A ، الصف الأول من AB

تمارين ١ — ٤

١ - لتكن A ، B مصفوفتين من النوع 4×5 ولتكن C ، D ، E ، مصفوفات من النوع 2×5 ، 2×4 ، 4×5 على الترتيب حدد أياً من عبارات المصفوفات التالية معرفة . بالنسبة للمعرفات منها أوجد نوع المصفوفة الناتجة :

(أ) BA (ب) $AC + D$ (جـ) $AE + B$

(د) $AB + B$ (هـ) $E(A + B)$ (و) $E(AC)$

٢ - (أ) أثبت أنه إذا كانت AB ، BA معرفتين فإن AB ، BA مصفوفتان مربعتان .

(ب) أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ وكانت $A(BA)$ معرفة فإن B مصفوفة من النوع $n \times m$.

٣ - حل معادلة المصفوفات الآتية لإيجاد a ، b ، c ، d

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

٤ – اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب :

(أ) AB (ب) $D+E$ (جـ) $D-E$

(د) DE (هـ) ED (و) $-7B$

٥ – باستخدام المصفوفات فى تمرين ٤ ، احسب إذا أمكن

(أ) $3C-D$ (ب) $(3E)D$

(جـ) $(AB)C$ (د) $A(BC)$

(هـ) $(4B)C+2B$ (و) $D+E^2$ (حيث $E^2 = EE$)

٦ – بافتراض أن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

استخدم الطريقة المبينة فى مثال ١٧ لإيجاد

(أ) الصف الأول من AB (ب) الصف الثالث من AB

(جـ) العمود الثانى من AB (د) العمود الأول من BA

(هـ) الصف الثالث من AA (و) العمود الثالث من AA

٧ – لتكن C ، D ، E المصفوفات التى فى تمرين ٤ . استخدم أقل حسابات ممكنة لتعيين العنصر فى الصف الثانى والعمود الثالث للمصفوفة $C(DE)$.

٨ – (أ) أثبت أنه إذا وجد بالمصفوفة A صف من الأصفار وكانت B أى مصفوفة معرف لها حاصل الضرب AB ، فيوجد بالمصفوفة AB صف من الأصفار .

(ب) أوجد نتيجة مماثلة تشمل عموداً من الأصفار .

٩ – لتكن A أى مصفوفة من النوع $m \times n$ ولتكن 0 المصفوفة من النوع $m \times n$ التى جميع عناصرها أصفار . أثبت إذا كانت $kA = 0$ فإن $k = 0$ أو $A = 0$

١٠ – لتكن I المصفوفة من النوع $n \times n$ التى عناصرها فى الصف i والعمود j كما يلى :

$$\begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

أثبت أن $AI = IA = A$ لأى مصفوفة A من النوع $n \times n$.

١١ – المصفوفة المربعة تسمى مصفوفة قطرية إذا كانت كل العناصر أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسى . أثبت أن حاصل ضرب مصفوفتين قطريتين هو أيضاً مصفوفة قطرية . ضع قاعدة لضرب المصفوفات القطرية .

١٢ – (أ) أثبت أن عناصر العمود j من المصفوفة AB هى عناصر حاصل الضرب AB_j حيث B_j هى المصفوفة المكونة من العمود j للمصفوفة B .

(ب) أثبت أن عناصر الصف i من المصفوفة AB هى عناصر حاصل الضرب $A_i B$ حيث A_i هى المصفوفة المكونة من الصف i للمصفوفة A .

١ – ٥ قواعد حساب المصفوفات

على الرغم من أن الكثير من قواعد الحساب للأعداد الحقيقية ينطبق أيضاً على المصفوفات فهناك بعض الاستثناءات . وواحد من أهم الاستثناءات يحدث عند ضرب المصفوفات . بالنسبة لأى عددين حقيقين a ، b يكون دائما $ab = ba$ غالباً ما تسمى هذه الخاصية بقانون الإبدال للضرب . بالنسبة للمصفوفات ليس من الضرورى أن تتساوى AB ، BA. يمكن أن يفشل حدوث التساوى لثلاثة أسباب . فمثلا يمكن أن تكون AB معرفة ، لكن BA لا تكون معرفة . تحدث هذه الحالة عندما تكون A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×4 يمكن أيضاً أن تكون AB ، BA معرفتين لكن تكونان من نوعين مختلفين . يحدث هذا عندما تكون A مصفوفة من النوع 2×3 و B مصفوفة من النوع 3×2 أخيراً، يوضح المثال التالى أنه من الممكن أن تكون $AB \neq BA$ رغم كون المصفوفتين AB ، BA كلتيهما معرفتين وهما من نوع واحد .

مثال (١٨) :

اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الضرب يعطى

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وإذن $AB \neq BA$

رغم عدم تحقق قانون الإبدال بالنسبة للضرب فى حساب المصفوفات ، فإن كثيراً من قوانين الحساب المعروفة تتحقق للمصفوفات . نلخص فى النظرية التالية عددا من أكثر هذه القوانين أهمية كما نذكر أسماءها .

نظرية ٢ : تتحقق القوانين التالية لحساب المصفوفات ، وذلك بفرض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إتمام العمليات المبينة .

(أ) $A + B = B + A$ (قانون الإبدال بالنسبة للجمع)

(ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (قانون الإدماج بالنسبة للجمع)

(جـ) $A(BC) = (AB)C$ (قانون الإدماج بالنسبة للضرب)

(د) $A(B + C) = AB + AC$ (قانون التوزيع)

(هـ) $(B + C)A = BA + CA$ (قانون التوزيع)

(و) $A(B - C) = AB - AC$

(ز) $(B - C)A = BA - CA$

(ح) $a(B + C) = aB + aC$

(ط) $a(B - C) = aB - aC$

(ى) $(a + b)C = aC + bC$

(ك) $(a - b)C = aC - bC$

(ل) $(ab)C = a(bC)$

(م) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

تؤكد كل معادلة من المعادلات التى فى النظرية على متساوية بين المصفوفات. لبرهنة أى من هذه المتساويات يلزم أن نثبت أن المصفوفة بالطرف الأيسر من نفس النوع مثل المصفوفة بالطرف الأيمن ، وأن العناصر المتناظرة فى المصفوفتين متساوية . للتوضيح سنبرهن (ح) . ونعطى بعض البراهين المتبقية كمسائل .

برهان (ح) : بما أن الطرف الأيسر يتضمن العملية $A + C$ ، فيجب أن تكون المصفوفتان B ، C من نوع واحد وليكن $m \times n$ وينتج من ذلك أن المصفوفتين $a (B + C)$ و $aB + aC$ تكونان من نفس هذا النوع .

ليكن l_{ij} عنصراً فى مصفوفة الطرف الأيسر وليكن r_{ij} العنصر المناظر فى مصفوفة الطرف الأيمن . لإتمام البرهان يجب إثبات أن $l_{ij} = r_{ij}$ إذا فرضنا أن a_{ij} ، b_{ij} ، c_{ij} عناصر فى الصف i والعمود j للمصفوفات A ، B ، C على الترتيب . فينتج من تعاريف عمليات المصفوفات أن

$$l_{ij} = a(b_{ij} + c_{ij}) \quad \text{و} \quad r_{ij} = ab_{ij} + ac_{ij}$$

بما أن $a(b_{ij} + c_{ij}) = ab_{ij} + ac_{ij}$ فنحصل على $l_{ij} = r_{ij}$ ويتم ذلك البرهان .

برغم أن عمليتى جمع المصفوفات وضرب المصفوفات قد عرفتا لأزواج من المصفوفات ، فإن قانونى الإدماج (ب) و (جـ) يتيحان لنا أن نرمز إلى نواتج الجمع وحواصل الضرب لثلاث مصفوفات بالرمزين $A + B + C$ و ABC دون إدخال أى أقواس . ويبرر ذلك أنه مهما كانت كيفية إدخال الأقواس فقانونا الإدماج يضمنان الحصول على نفس النتيجة النهائية . بدون الدخول فى التفاصيل ، يمكننا ملاحظة تحقق نتائج مماثلة بالنسبة إلى نواتج الجمع والضرب المتضمنة أربع مصفوفات أو أكثر . بصفة عامة ، إذا أعطينا أى حاصل جمع أو حاصل ضرب للمصفوفات فيمكن إدخال أو حذف الأقواس فى أى مكان بداخل العبارة دون التأثير على النتيجة النهائية .

مثـال (١٩) :

كمثال توضيحى لقانون الإدماج بالنسبة لضرب المصفوفات ، اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فيكون

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية أخرى

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

وإذاً

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن $(AB)\,C = A\,(BC)$ كما تكفل نظرية ٢ (جـ)

تسمى **مصفوفة صفرية** المصفوفة التى كل عناصرها أصفار ، مثل

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

سيرمز للمصفوفات الصفرية بالرمز 0 ، وإذا كان من المهم التنويه عن النوع فسنكتب $0_{m \times n}$ للمصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$.

إذا كانت A أى مصفوفة و 0 المصفوفة الصفرية من نفس النوع فمن الواضح أن $A + 0 = A$ تلعب المصفوفة الصفرية فى هذه المعادلة للمصفوفات نفس الدور الذى يلعبه العدد **0** فى المعادلة العددية $a + 0 = a$.

حيث أننا نعلم بالفعل أن بعض قواعد الحساب للأعداد الحقيقية لا تطبق على حساب المصفوفات ، فيكون من التهور افتراض أن كل خواص صفر الأعداد الحقيقية تطبق على صفر المصفوفات . على سبيل المثال ، اعتبر النتيجتين المعتادتين فى حساب الأعداد الحقيقية

١ – إذا كانت $ab = ac$ ، $a \neq 0$ فان $b = c$ (يسمى هذا بقانون الحذف) .

٢ – إذا كانت $ad = 0$ فيكون أحد العاملين فى اليسار مساوياً للصفر .

كما يوضح المثال التالى ، تكون النتيجتان المناظرتان خاطئتين فى حساب المصفوفات .

مثال (٢٠) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا نجد أن

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

رغم أن $A \neq 0$ فيكون من غير الصحيح شطب A على كلا الطرفين للمعادلة $AB = AC$ وكتابة $B = C$. وإذاً لا ينطبق قانون الحذف على حساب المصفوفات .

أيضاً $AD = 0$ ، مع ذلك $A \neq 0$ و $D \neq 0$ فالنتيجة (٢) المدونة أعلاه لا تنطبق على حساب المصفوفات .

بالرغم من هذه الأمثلة السلبية ، فينطبق عدد من الخواص المعروفة للعدد الحقيقى 0 على المصفوفات الصفرية . وتتلخص فى النظرية التالية بعض من أهم هذه الخواص .

البراهين متروكة كتمارين .

نظرية ٣ : القواعد التالية لحساب المصفوفات صحيحة ، بافتراض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إتمام العمليات المشار إليها .

(أ) $A + 0 = 0 + A = A$

(ب) $A - A = 0$

(جـ) $0 - A = -A$

(د) $A0 = 0; \quad 0A = 0$

كتطبيق لنتائجنا فى حساب المصفوفات ، تبرهن النظرية التالية ، والتى بادرنا بها مبكراً فى النص .

نظرية ٤ : يوجد لكل نظام من أنظمة المعادلات الخطية إما عدد لانهائى من الحلول أو حل واحد بالضبط أو لا يوجد له أى حل .

البرهان : إذا كان $AX = B$ نظاما من المعادلات الخطية فيكون واحد بالضبط من الآتى صحيحاً :
(أ) لا يوجد للنظام أى حل ، (ب) يوجد للنظام حل واحد بالضبط ، (جـ) يوجد للنظام أكثر من حل واحد . سيكون البرهان كاملا إذا استطعنا إثبات وجود عدد لا نهائى من الحلول للنظام فى الحالة (جـ) .

افترض أن $AX = B$ لها أكثر من حل ، ليكن X_1 ، X_2 حلين مختلفين وعليه فإن $AX_1 = B$ ، $AX_2 = B$ بطرح هاتين المعادلتين نحصل على $AX_1 - AX_2 = 0$ أو $A(X_1 - X_2) = 0$
إذا افترضنا أن $X_0 = X_1 - X_2$ وأن k أى عدد قياسى ، فإن

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k(AX_0) \\ &= B + k0 \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

ولكن هذا ينص على أن $X_1 + kX_0$ حل للمعادلة $AX = B$ بما أنه يوجد عدد لا نهائى من الاختيارات للعدد القياسى k ، فيوجد للنظام $AX = B$ عدد لا نهائى من الحلول .

تعتبر ذات أهمية خاصة المصفوفات المربعة مع أحاد فى القطر الرئيسى وأصفار فى غير القطر الرئيسى ، مثل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

كل مصفوفة من أمثال هذه المصفوفات تسمى **مصفوفة الوحدة** ويرمز لها بالرمز I وإذا كان من المهم تأكيد النوع ، سنكتب I_n لمصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$.

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن $AI_n = A$ و $I_mA = A$ كما هو موضح فى المثال التالى . وعليه تلعب مصفوفة الوحدة فى حساب المصفوفات نفس دور العدد 1 فى العلاقات العددية $a \cdot 1 = a$ و $1 \cdot a = a$.

مثال (٢١) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} ،$$

فيكون حينئذ

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

و

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة ، وكان من الممكن إيجاد مصفوفة B بحيث يكون $AB = BA = I$ فيقال إن A قابلة للانعكاس وتسمى B مصفوفة عكسية (معكوس) للمصفوفة A .

مثال (٢٢) :

المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة عكسية للمصفوفة} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

و

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال (٢٣) :

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

غير قابلة للانعكاس . لمعرفة السبب ، افترض أن

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

مصفوفة ما من النوع 3×3. من مثال ١٧ العمود الثالث للمصفوفة BA هو

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من المنطق أن نسأل عن إمكانية وجود أكثر من معكوس واحد لمصفوفة قابلة للانعكاس . توضح النظرية الآتية أن الإجابة بالنفى ، فالمصفوفة القابلة للانعكاس يكون لها معكوس واحد .

نظرية ٥ : إذا كانت B و C معكوسين للمصفوفة A فإن $B = C$.

البرهـــان : حيث إن B معكوس للمصفوفة A فإن $BA = I$. ضرب الطرفين من اليمين فى المصفوفة C يعطى $(BA)C = I\,C = C$ ولكن $(BA)C = B(AC) = BI = B$ وإذن $B = C$.

تبعاً لهذه النتيجة الهامة ، يمكننا الآن أن نتكلم عن « ال » معكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس . إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فسيرمز لمعكوسها بالرمز A^{-1} وعليه فإن

$$AA^{-1} = I \quad \text{و} \quad A^{-1}A = I$$

المعكوس للمصفوفة A يلعب نفس الدور فى حساب المصفوفات الذى يلعبه المقلوب a^{-1} فى العلاقات العددية $aa^{-1} = 1$ و $a^{-1}a = 1$

مثـــال (٢٤) :

اعتبر المصفوفة من النوع 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت $ad - bc \neq 0$ فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

إذ أن $AA^{-1} = I_2$ و $A^{-1}A = I_2$ (تحقق من ذلك) سنبين فى القسم التالى كيف يمكن إيجاد المعكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس من نوع يختلف من 2×2

نظرية ٦ : إذا كانت A و B قابلتين للانعكاس ومن نفس النوع ، فإن

(أ) AB قابلة للانعكاس

(ب) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

البرهان : إذا أمكننا أن نثبت أن $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ فسنكون قد أثبتنا في نفس الوقت أن AB قابلة للانعكاس وأن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ولكن

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

وبالمثل فإن $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

رغم أننــا سوف لانعطي البرهان فهذه النتيجة يمكن أن تمتد لتشمل ثلاثة أو أكثر من العوامل . عليه يمكننا أن نقرر النتيجة العامة التالية .

حاصل ضرب المصفوفات القابلة للانعكاس يكون دائماً قابلا للانعكاس ، ومعكوس حاصل الضرب هو حاصل ضرب المعكوسات في ترتيب عكسي .

مثال (٢٥) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

بتطبيق الصيغة المعطاة في مثال ٢٤ ، نحصل على

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

وأيضاً

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

وإذن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ كما هو مكفول من نظرية (٦) .

إذا كانت A مصفوفة مربعة و n عدد موجب ، فإننا نعرف

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ من العوامل}}$$

$$A^0 = I$$

بالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإننا نعرف

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{من العوامل } n}$$

نظرية ٧ : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن :

(أ) A^{-1} قابلة للانعكاس و $(A^{-1})^{-1} = A$

(ب) A^n قابلة للانعكاس ؛ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ لقيم $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(جـ) لأى عدد k قياسي وغير صفرى ، kA قابلة للانعكاس و $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

البرهـان :

(أ) حيث إن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ، فتكون A^{-1} قابلة للانعكاس و $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ب) هذا الجزء متروك كتمرين .

(جـ) إذا كان k أى عدد قياسي غير صفرى ، فإن النتائج (ل) ، (م) بنظرية ٢ تسمح لنا بأن نكتب .

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

وبالمثل $\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$ ، إذن kA قابلة للانعكاس و $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

وننهى هذا القسم بملاحظة أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان r و s عددين صحيحين ، فإن القوانين المألوفة التالية للأسس تكون صحيحة

$$A^rA^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

البراهين متروكة كتمارين .

تمارين ١ — ٥

١ – لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad a = -3 \quad b = 2$$

أثبت أن :

(أ) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ب) $(AB)C = A(BC)$

(جـ) $(a + b)C = aC + bC$ (د) $a(B - C) = aB - aC$

٢ – باستخدام المصفوفات والأعداد القياسية فى تمرين ١ ، أثبت أن

(أ) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (ب) $A(B - C) = AB - AC$

٣ – استخدم الصيغة المعطاة فى مثال ٢٤ لحساب المعكوس لكل من المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٤ – تحقق من أن المصفوفتين A و B فى تمرين ٣ تحقق العلاقة $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

٥ – لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من نفس النوع ، هل $(AB)^2 = A^2B^2$ متطابقة مصفوفات صحيحة ؟ برر إجابتك .

٦ – لتكن A مصفوفة قابلة للانعكاس ومعكوسها هو

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A .

٧ – لتكن A مصفوفة قابلة للانعكاس ، بفرض أن معكوس $7A$ هو

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A .

٨ – لتكن A هى المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب A^3 ، A^{-3} ، $A^2 - 2A + I$.

٩ – لتكن A هى المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حدد هل A قابلة للانعكاس ، وإذا كانت كذلك ، أوجد معكوسها .

(إرشاد : حل $AX = I$ بمساواة العناصر المناظرة فى الطرفين) .

١٠ – أوجد معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

١١ – (أ) أوجد مصفوفتين A و B من النوع 2×2 بحيث يكون

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

(ب) أثبت أنه إذا كان A ، B مصفوفتين مربعتين بحيث كان $AB = BA$ فإن .

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

(جـ) أوجد مفكوكاً للمصفوفة $(A + B)^2$ بحيث يكون متحققاً لكل المصفوفات A ، B التي من نوع واحد .

١٢ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$ أثبت أن A قابلة للانعكاس وأوجد معكوسها .

١٣ – افترض أن A مصفوفة مربعة تحقق $A^2 - 3A + I = 0$. أثبت أن $A^{-1} = 3I - A$.

١٤ – (أ) أثبت أنه لايمكن أن يوجد معكوس لأى مصفوفة ذات صف من الأصفار .

(ب) أثبت أنه لايمكن أن يوجد معكوس لأى مصفوفة ذات عمود من الأصفار .

١٥ – هل من اللازم أن يكون حاصل جمع مصفوفتين قابلتين للانعكاس قابلا للانعكاس ؟

١٦ – لتكن A و B مصفوفتين مربعتين بحيث يكون $AB = 0$. أثبت أن A لايمكن أن تكون قابلة للانعكاس مالم تكن $B = 0$.

١٧ – لماذا لم نكتب الجزء (د) من نظرية ٣ كالتالى $A0 = 0 = 0A$ ؟

١٨ – للمعادلة العددية $a^2 = 1$ حلان بالضبط . أوجد على الأقل ثمانى مصفوفات مختلفة من النوع 3×3 بحيث تحقق هذه المصفوفات المعادلة $A^2 = I_3$

(ارشـــاد : ابحث عن الحلول التى فيها كل العناصر فى غير القطر الرئيسى تكون أصفاراً) .

١٩ – ليكن $AX = B$ نظاماً متآلفاً من المعادلات الخطية ، وليكن X_1 حلا مثبتاً . أثبت أن كل حل للنظام يمكن أن يكتب على الصورة $X = X_1 + X_0$ حيث X_0 حل للنظام $AX = 0$. أثبت أيضاً أن كل مصفوفة بهذا الشكل تكون حلا .

٢٠ – طبق الجزأين (د) ، (م) من نظرية ٢ على المصفوفات A ، B و C (-1) لتشتق النتيجة التى فى الجزء (و) .

٢١ – برهن الجزء (ب) من نظرية ٢ .

٢٢ – برهن نظرية ٣ .

٢٣ – برهن الجزء (جـ) من نظرية ٢ .

٢٤ – برهن الجزء (جـ) من نظرية ٧ .

٢٥ – آخذاً فى الاعتبار قوانين الأسس $A^r A^s = A^{r+s}$ و $(A^r)^s = A^{rs}$ ؛

(أ) أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن هذه القوانين تكون صحيحة لكل القيم الصحيحة غير السالبة للأعداد r ، s .

(ب) أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإن هذه القوانين تنطبق على كل القيم الصحيحة السالبة للأعداد r ، s .

٢٦ – أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس و كان k أى عدد قياسى غير صفرى، فإن $(kA)^n = k^n A^n$ لكل القيم الصحيحة للعدد n .

٢٧ – (أ) أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس و كان $AB = AC$ فإن $B = C$.

(ب) إشرح لماذا لايتناقض الجزء (أ) من هذه المسألة مع مثال ٢٠ .

١ – ٦ المصفوفات البسيطة وطريقة لايجاد A^{-1}

سندرس فى هذا القسم طريقة عملية بسيطة لإيجاد المعكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس .

تعريف : أى مصفوفة من النوع $n \times n$ تسمى **مصفوفة بسيطة** إذا أمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة I_n من النوع $n \times n$ بإجراء عملية بسيطة (أولية) واحدة على الصفوف .

مثـال (٢٦) :

مدرج أدناه أربع مصفوفات بسيطة و العمليات التى أوجدتها

(١) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ — اضرب الصف الثانى من I_2 فى -3

(٢) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ — ابـدل الصـفين الثانى والرابع من I_4

(٣) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — اضف ثلاثة امثال الصف الثالث من I_3 الى الصف الاول

(٤) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — اضرب الصف الاول من I_3 فى العدد 1

عندما تضرب مصفوفة A من اليسار بمصفوفة بسيطة E يكون التأثير هو إجراء عملية بسيطة على صفوف المصفوفة A . هذا هو محتوى النظرية التالية التى نذكرها بدون برهان .

نظرية ٨ : إذا نتجت المصفوفة البسيطة E بإجراء عملية معينة على صفوف I_m وإذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فيكون حاصل الضرب EA هو المصفوفة الناتجة بإجراء نفس العملية على صفوف A .

يوضح المثال التالى هذه الفكرة :

مثـــال (٢٧) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

واعتبر المصفوفة البسيطة

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التى تنتج من إضافة ثلاثة أمثال الصف الأول من I_3 إلى الصف الثالث . حاصل الضرب EA هو

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

وهو بالضبط المصفوفة التى نحصل عليها بإضافة ثلاثة أمثال الصف الأول من A إلى الصف الثالث .

ملحوظة : نظرية (٨) ، أولا وقبل كل شىء ، لها أهمية خاصة من الناحية النظرية ، وستستخدم فى الحصول على بعض النتائج عن المصفوفات وأنظمة المعادلات الخطية . من وجهة النظر الحسابية ، يفضل إجراء عمليات على الصفوف مباشرة عن الضرب من اليسار بمصفوفة بسيطة .

إذا أجريت عملية بسيطة على صفوف مصفوفة وحدة I للحصول على مصفوفة بسيطة E فإنه توجد عملية أخرى على الصفوف عند إجرائها على E نحصل على I مرة أخرى . على سبيل المثال، إذا حصلنا على E بضرب الصف i من I فى ثابت غير صفرى c فيمكن إعادة I بضرب الصف i من E فى $1/c$. الإمكانيات المختلفة مدرجة فى شكل (١ – ٤) .

العمليات على صفوف I التى تنتج E	**العمليات على صفوف E التى تنتج I**
اضرب الصف i فى c ، حيث $c \neq 0$	اضرب الصف i فى $1/c$
ابدل الصفين i و j	ابدل الصفين i و j
أضف إلى الصف j حاصل ضرب الصف i فى c	أضف إلى الصف j حاصل ضرب الصف i فى $-c$

(شكل ١ – ٤)

العمليات فى الطرف الأيسر لهذا الجدول تسمى **عمليات عكسية** للعمليات المناظرة فى الطرف الأيمن .

مثـــال (٢٨) :

باستخدام النتائج بشكل ١ – ٤ ، يمكن إرجاع الثلاثة الأول من المصفوفات البسيطة المعطاة فى مثال ٢٦ إلى مصفوفات وحدة بتطبيق العمليات التالية على الصفوف : اضرب الصف الثانى من (١) فى $1/3$ – ؛ ابدل الصفين الثانى والرابع من (٢) ، أضف إلى الصف الأول من (٣) حاصل ضرب الصف الثالث فى 3 – .

تعطى النظرية التالية خاصية هامة للمصفوفات البسيطة

نظرية ٩ : جميع المصفوفات البسيطة قابلة للانعكاس ، ومعكوساتها مصفوفات بسيطة أيضاً .

البرهان : إذا كانت E مصفوفة بسيطة ، فمن الملاحظات السابقة يمكن الحصول على I من E بإجراء عملية بسيطة واحدة على صفوف E . لتكن E_0 المصفوفة البسيطة التى نحصل عليها بإجراء هذه العملية على صفوف I بتطبيق نظرية (٨) ، نجد أن

$$E_0E = I \tag{1.6}$$

لتكملة البرهان ، سنثبت أن

$$EE_0 = I$$

بما أن E_0 مصفوفة بسيطة ، فتوجد عملية بسيطة عند إجرائها على صفوف E_0 ، نحصل على I . لتكن E_1 هى تلك المصفوفة البسيطة التى نحصل عليها بإجراء هذه العملية على صفوف I بتطبيق نظرية (٨) مرة أخرى نحصل على

$$E_1E_0 = I \tag{1.7}$$

ضرب كلا طرفى المعادلة 1.6 من اليسار فى E_1 يعطى $E_1E_0E = E_1$ أى $IE = E_1$ أى $E = E_1$ التعويض بالمصفوفة E بدلا من E_1 فى المعادلة 1.7 يعطى $EE_0 = I$ ، بذلك يكتمل البرهان .

إذا أمكننا الحصول على المصفوفة B من المصفوفة A بإجراء متتابعة منتهية من عمليات بسيطة على الصفوف فواضح أنه يمكننا إعادة B إلى A بإجراء العمليات العكسية ، للعمليات البسيطة السابقة ، على صفوف B ، بترتيب عكسى . المصفوفات التى يمكن الحصول عليها كل واحدة من الأخرى بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف تسمى **متكافئة صفياً** . تعطينا النظرية الآتية بعض العلاقات الأساسية بين المصفوفات من النوع $n \times n$ والأنظمة لعدد n من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل . هذه النتائج لها أهمية قصوى وسوف تستخدم العديد من المرات فى الأقسام القادمة .

نظرية ١٠ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فالتقارير التالية تكون متكافئة ، بمعنى أن ، كل التقارير صحيحة أو كلها خاطئة .

(أ) A قابلة للانعكاس .

(ب) $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .

(جـ) A متكافئة صفيا مع I_n .

البرهــان : سنبرهن التكافؤ بإثبات السلسلة التالية من الاستنتاجات :

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a).$$

$(a) \Rightarrow (b)$ افترض أن A قابلة للانعكاس ولتكن X_0 أى حل للنظام $AX = 0$ أى إن $AX_0 = 0$ ضرب كلا طرفى هذه المعادلة فى A^{-1} يعطى $A^{-1}(AX_0) = A^{-1}0$ أى $(A^{-1}A)X_0 = 0$ أى $X_0 = 0$ وإذن $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .

$(b) \Rightarrow (c)$: لتكن $AX = 0$ هي صيغة المصفوفات للنظام .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

وافترض أن النظام له الحل التافه فقط . إذا أجرينا الحل بطريقة جاوس – جوردان للحذف ، فإن نظام المعادلات المناظر للصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة الممتدة هو

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ \ddots \quad & \\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

وإذن المصفوفه الممتدة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

للنظام (1.8) يمكن اختزالها إلى المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

للنظام (1.9) بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف . إذا أغفلنا العمود الأخير (عمود الأصفار) فى كلتا المصفوفتين . يمكننا أن نستخلص أنه يمكن اختزال A إلى I_n بواسطة متتابعة من العمليات البسيطة على الصفوف ، بمعنى آخر A متكافئة صفياً مع I_n .

$(a) \Rightarrow (c)$: افترض أن A متكافئة صفياً مع I_n إذن يمكن اختزال A إلى I_n بواسطة متتابعة منتهية من العمليات البسيطة على الصفوف . باستخدام نظرية (٨) ، كل من هذه العمليات يمكن إنجازها بالضرب من اليسار فى مصفوفة بسيطة مناسبة . وعليه يمكننا إيجاد مصفوفات بسيطة E_1 ، E_2 ، . . . ، E_k بحيث تكون

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{1.10}$$

باستخدام نظرية ٩ المصفوفات E_1 ، E_2 ، . . . ، E_k قابلة للانعكاس ، بضرب كلا طرفى المعادلة (1.10) من اليسار بالتتابع فى $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ نحصل على

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \tag{1.11}$$

بما أن (1.11) تعبر عن A كحاصل ضرب مصفوفات قابلة للانعكاس ، فيمكننا أن نستخلص أن A قابلة للانعكاس .

ملحوظة : بما أن I_n فى الصورة الصفية المميزة المختزلة وبما أن الصورة الصفية المميزة المختزلة لأى مصفوفة A وحيدة (فالجزء) (جـ) من النظرية ١٠ يكافىء التقرير أن I_n هى الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A بمثابة أول تطبيقاتنا لهذه النظرية ستأسس طريقة لتعيين المعكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس . بكتابة معكوس كل من طرفى (1.11) نحصل على $A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1$ أو بصورة مكافئة

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I_n \tag{1.12}$$

وهذه تخبرنا أن A^{-1} يمكن الحصول عليها بضرب I_n بالتتابع من اليسار فى المصفوفات البسيطة E_1 ، E_2 ، . . . ، E_k حيث إن الضرب من اليسار فى إحدى هذه المصفوفات البسيطة يجرى عملية على الصفوف فينتج بمقارنة المعادلتين (1.10) و (1.12) أن متتابعة العمليات على صفوف A التى تختزله إلى I_n ستختزل I_n إلى A^{-1} وعليه فلإيجاد المعكوس لمصفوفة قابلة للانعكاس A . يجب أن نجد متتابعة من العمليات البسيطة على صفوف A تختزل A إلى مصفوفة الوحدة ثم نجرى نفس هذه المتتابعة من العمليات على I_n لنحصل على A^{-1} . تعطى فى المثال التالى طريقة بسيطة لتنفيذ هذا الأسلوب .

مثــال (٢٩) :

أوجد المصفوفة العكسية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

نرغب فى اختزال A إلى مصفوفة الوحدة بواسطة عمليات بسيطة على الصفوف وفى نفس الوقت تطبيق هذه العمليات على I لتنتج A^{-1} يمكن أن يتم ذلك بإلحاق مصفوفة الوحدة إلى اليمين من A وتطبيق العمليات على صفوف كلا الطرفين حتى يختزل الطرف الأيسر إلى I ستكون المصفوفة النهائية على الصورة $[I\ A^{-1}]$.

يمكن إجراء الحسابات كالتالى :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

طرحنا ضعف الصف الاول من الثانى وطرحنا الصف الاول من الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

أضفنا ضعف الصف الثانى الى الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ضربنا الصف الثالث فى 1-

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

أضفنا ثلاثة امثال الصف الثالث الى الثانى وطرحنا ثلاثة امثال الصف الثالث من الاول

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

طرحنا ضعف الصف الثانى من الاول

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

والآن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

كثيراً ما لا يعرف مسبقاً هل المصفوفة المعطاة قابلة للانعكاس أم لا . إذا أجريت المحاولة بالأسلوب المستخدم فى هذا المثال على مصفوفة غير قابلة للانعكاس فاستخدام الجزء (جـ) من نظرية ١٠ يكون من المستحيل اختزال الطرف الأيسر إلى I بواسطة عمليات على الصفوف . سيحدث عند مرحلة ما من مراحل الحساب أن يظهر صف من الأصفار فى الطرف الأيسر . يمكننا أن نستخلص عندئذ أن المصفوفة المعطاة غير قابلة للانعكاس ، ويمكن إيقاف الحساب

مثال (٣٠) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

تطبيق أسلوب مثال (٢٩) يؤدى إلى

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

طرحنا ضعف الصف الاول من الثانى واضفنا الصف الاول الى الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

أضفنا الصف الثانى الى الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

حيث إننا حصلنا على صف من الأصفار فى الطرف الأيسر ، فتكون A غير قابلة للانعكاس .

مثـــال (٣١) :

لقد أثبتنا فى مثال (٢٩) أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

مصفوفة قابلة للانعكاس . يمكننا الآن أن نستخلص من نظرية (١٠) أن نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

له الحل التافه فقط

تمارين ١ ــ ٦

١ – أى من المصفوفات التالية تعتبر مصفوفات بسيطة

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢ – عين العملية التى تجرى على صفوف المصفوفة البسيطة المعطاة لتعيدها إلى مصفوفة واحدة

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٣ – اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفات بسيطة E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_4 بحيث تكون

(أ) $E_1A = B$ (ب) $E_2B = A$ (جـ) $E_3A = C$ (د) $E_4C = A$

٤ – هل من الممكن فى تمرين ٣ أن نجد مصفوفة بسيطة E بحيث تكون $E\,B = C$ ؟ برر إجابتك .

فى التمارين ٥ ، ٦ ، ٧ استخدم الطريقة الموضحة فى مثالى ٢٩ و ٣٠ لإيجاد المعكوس للمصفوفة المعطاة إذا كانت هذه المصفوفة قابلة للانعكاس

٥ – (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

٦ – (أ) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

٧ – (أ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٨ – أثبت أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة قابلة للانعكاس لكل قيم θ وأوجد A^{-1}

٩ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفتين بسيطتين E_1 ، E_2 بحيث $E_2E_1A = I$

(ب) اكتب A^{-1} كحاصل ضرب مصفوفتين بسيطتين

(جـ) أكتب A كحاصل ضرب مصفوفتين بسيطتين

١٠ – أجر العمليات الآتية على صفوف

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

بضرب A من اليسار بمصفوفة بسيطة مناسبة . حقق إجابتك فى كل حالة بإجراء العملية على صفوف A مباشرة .

(أ) ابدل الصفين الأول والثالث .

(ب) اضرب الصف الثانى فى $1/3$.

(جـ) أضف ضعف الصف الثانى إلى الصف الأول .

١١ – عبر عن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

بالصورة $A = EFR$ ، حيث E ، F مصفوفتان بسيطتان و R فى الصورة الصفية المميزة .

١٢ – أثبت أنه إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

مصفوفة بسيطة فإن أحد العناصر على الأقل بالصف الثالث يجب أن يكون صفراً .

١٣ – أوجد المعكوس لكل من المصفوفات التالية من النوع 4×4 ، حيث k_1 ، k_2 ، k_3 ، k_4 و k جميعها غير صفرية

(أ) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

١٤ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإنه توجد مصفوفة قابلة للانعكاس C بحيث تكون CA فى الصورة الصفية المميزة المختزلة .

١٥ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس و كانت B متكافئة صفياً مع A ، فإن B أيضاً قابلة للانعكاس .

١ ـــ ٧ نتائج اخرى عن انظمة المعادلات وقابلية الانعكاس

فى هذا القسم سنؤسس مزيداً من النتائج عن أنظمة المعادلات الخطية وقابلية المصفوفات للانعكاس سيقودنا عملنا إلى طريقة لحل n من المعادلات فى n من المجاهيل ، والتى ستكون ذات فاعلية أكثر من طريقة جاوس للحذف لأنواع معينة من المسائل .

نظرية (١١) : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$ ، فلكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$ يكون نظام المعادلات $AX = B$ له حل واحد بالضبط وهو $X = A^{-1} B$.

البرهـــان : حيث إن $A(A^{-1}B) = B$ فإن $X = A^{-1}B$ حل للمعادلة $AX = B$. لإثبات أن هذا هو الحل الوحيد، سنفترض أن X_0 حل اختيارى ثم نثبت أن X_0 يجب أن يكون هو الحل $A^{-1}B$.

إذا كانت X_0 أى حل، فإن $AX_0 = B$.بضرب كلا الطرفين فى A^{-1} نحصل على $X_0 = A^{-1}B$.

مثـــال (٣٢) :

اعتبر نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \quad\quad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

هذا النظام يمكن كتابته بصيغة المصفوفات على الصورة $AX = B$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

لقد أثبتنا فى مثال (٢٩) أن A قابلة للانعكاس وأن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

باستخدام نظرية (١١) نجد أن حل النظام هو

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أى $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 2$.

الأسلوب الموضح فى هذا المثال يطبق فقط عندما تكون مصفوفة المعاملات A مربعة بمعنى آخر عندما يكون عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل . مع ذلك ، فكثير من المسائل فى العلوم والهندسة يتضمن أنظمة من هذا النوع والطريقة مفيدة بصفة خاصة عندما يكون من الضرورى حل سلسلة كاملة من الأنظمة

$$AX = B_1, AX = B_2, \ldots, AX = B_k$$

التى لكل منها نفس مصفوفة المعاملات المربعة . فى هذه الحالة ، الحلول

$$X = A^{-1}B_1, X = A^{-1}B_2, \ldots, X = A^{-1}B_k$$

يمكن الحصول عليها باستخدام عملية إيجاد معكوس مصفوفة واحدة وعمليات ضرب للمصفوفات عددها k فهذه الطريقة أكثر فعالية من تطبيق طريقة جاوس للحذف على كل نظام من الأنظمة k على حدة نستطرد لحظياً فى شرح كيف يمكن أن يظهر هذا الموقف فى التطبيق فى بعض مسائل تطبيقية معينة تعتبر الأنظمة الفيزيائية أنها التى يمكن وضعها بمثابة صناديق سوداء . يدل هذا المصطلح على أن النظام قد اختصر إلى عنصرية الجوهريين. يتخيل أى فرد ببساطة ، كما هو مبين فى شكل ١ – ٥ أنه إذا أمـــد النظام بدخل معين ، فسينتج ناتج معين للنظام . وتكون الأعمال الداخلية للنظام إما غير معلومة أو غير مهمة للمسألة – ومن ثم المصطلح لصندوق أسود .

بالنسبة لكثير من أنظمة الصندوق الأسود المهمة ، يمكن تمثيل كل من الدخل والناتج ، كمصفوفات ذات عمود واحد . على سبيل المثال . إذا كان الصندوق الأسود مكوناً من دائرة اليكترونية معينة ، فيمكن أن يكون الدخل مصفوفة من النوع $n \times 1$ عناصرها n من قراءات الجهد الكهربى عبر طرفا دخل معينة ويمكن أن يكون الناتج مصفوفة من النوع $n \times 1$ عناصرها قراءات التيار الناتج فى n من الأسلاك وبلغة الرياضيات

(شكل ١ – ٥)

مثل هذا النظام ليس إلا تحويل مصفوفة دخل من النوع $n \times 1$ إلى مصفوفة ناتج من النوع $n \times 1$ بالنسبة لقسم كبير من أنظمة الصندوق الأسود تكون مصفوفة الدخل C فى علاقة مع مصفوفة الناتج بواسطة معادلة مصفوفات

$$AC = B$$

حيث A مصفوفة من النوع $n \times n$ عناصرها بارامترات فيزيائية يحددها النظام . يعتبر أى نظام من هذا النوع مثالا على مايسمى بالنظام الفيزيائى الخطى . غالباً مايكون مهما فى التطبيق أن نحدد أى دخل يجب أن يمد به النظام لنحصل على ناتج مطلوب ومحدد بالنسبة لأى نظام فيزيائى خطى من النمط الذى أتممنا مناقشته الآن ، هذا يعادل حل معادلة $AX = B$ بالنسبة للدخل المجهول X ، ليعطى الناتج المطلوب B . وعليه إذا كان لدينا متوالية من مصفوفات نواتج مختلفة B_1 ، B_2 ، . . . ، B_k ونريد تعيين مصفوفات الدخول التى تنتج النواتج المعطاة ، يجب أن نحل بالتتابع أنظمة المعادلات الخطية

$$AX = B_j \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

ولكل نظام من هذه الأنظمة التى عددها k نفس مصفوفة المعاملات المربعة A . النظرية التالية تبسط مشكلة إثبات قابلية مصفوفة للانعكاس . حتى الآن ، لإثبات أن مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للانعكاس ، كان من الضرورى إيجاد مصفوفة B من النوع $n \times n$ بحيث يكون

$$AB = I \quad \text{و} \quad BA = I$$

تثبت النظرية التالية أنه إذا أوجدنا مصفوفة B من النوع $n \times n$ تستوفى أحد الشرطين ، فإن الشرط الآخر يتحقق تلقائياً .

نظرية ١٢ : لتكن A مصفوفة مربعة

(أ) إذا كانت B مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $BA = I$ ، فإن $B = A^{-1}$.
(ب) إذا كانت B مصفوفة مربعة وتحقق الشرط $AB = I$ ، فإن $B = A^{-1}$.

البرهان : سنثبت (أ) ونترك (ب) كتمرين

(أ) نفترض أن $BA = I$ إذا استطعنا إثبات أن A قابلة للانعكاس ، فيمكن أن يكتمل البرهان بضرب طرفى $BA = I$ فى A^{-1} لنحصل على $BAA^{-1} = IA^{-1}$ أى $BI = IA^{-1}$ أى $B = A^{-1}$.
لإثبات أن A قابلة للانعكاس يكفى أن نثبت أن النظام $AX = 0$ له الحل التافه فقط (انظر نظرية ١٠).
إذا ضربنا طرفى $AX = 0$ من اليسار فى B نحصل على $BAX = B0$ أى $IX = 0$ أى $X = 0$.
إذن نظام المعادلات $AX = 0$ له الحل التافه فقط .

نحن الآن فى موقف يسمح لنا بإضافة تقرير رابع مكافىء للثلاثة المعطاة فى نظرية (١٠) .

نظرية ١٣ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن التقارير الآتية متكافئة :

(أ) A قابلة للانعكاس .

(ب) $AX = 0$ لها الحل التافه فقط .

(جـ) A متكافئة صفياً مع I_n .

(د) $AX = B$ متآلفة لكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$.

البرهــان : حيث إننا أثبتنا تكافؤ (أ) ، (ب) ، (جـ) فى نظرية (١٠) ، فيكفى أن نبرهن أن (د) $\Rightarrow$ (أ) ، (أ) $\Rightarrow$ (د) .

(د) $\Rightarrow$ (أ) : إذا كانت A قابلة للانعكاس و كانت B أى مصفوفة من النوع $n \times 1$ فإن $X = A^{-1}B$ حل للمعادلة $AX = B$ وذلك باستخدام نظرية (١١) . إذن النظام $AX = B$ متآلف .

(أ) $\Rightarrow$ (د) : إذا كان النظام $AX = B$ متآلفاً لكل مصفوفة B من النوع $n \times 1$ فإنه على الأخص تكون النظم

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

متآلفة . لتكن X_1 حلا للنظام الأول ، X_2 حلا للنظام الثانى ، . . . ، X_n حلا للنظام الأخير ، ودعنا نكون مصفوفة C من النوع $n \times n$ أعمدتها هى هذه الحلول أى إن C على الصورة

$$C = [X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_n]$$

وفقاً للمناقشة فى مثال (١٧) ، ستكون الأعمدة المتتابعة لحاصل الضرب AC هى

$$AX_1, AX_2, \ldots, AX_n$$

وإذن

$$AC = [AX_1 \mid AX_2 \mid \cdots \mid AX_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

باستخدام الجزء (ب) من نظرية (١٢) ينتج أن $C = A^{-1}$ إذن A قابلة للانعكاس .

فى عملنا القادم ستكرر المسألة الأساسية التالية مرات ومرات فى مقامات عديدة .

مسألة أساسية : لتكن A مصفوفة محددة من النوع $m \times n$. أوجد جميع المصفوفات B من النوع $m \times 1$ بحيث يكون نظام المعادلات $AX = B$ متآلفاً .

إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس . فنظرية (١١) تحل هذه النظرية حلا كاملا بتأكيدها على أن لكل مصفوفة B من النوع $m \times 1$ النظام $AX = B$ له الحل الوحيد $X = A^{-1}B$.

إذا كانت A غير مربعة ، أو إذا كانت A مربعة ولكنها غير قابلة للانعكاس ، فإن النظرية (١١) **لاتطبق** . فى‌هذه الحالة نود تعيين الشروط ، إن وجد شرط ، التى يجب أن تستوفيها المصفوفة B لكى يكون النظام $AX = B$ متآلفاً . يوضح المثال التالى كيف يمكن استخدام طريقة جاوس للحذف لتعيين مثل هذه الشروط .

مثـــال (٣٣) :

ماهى الشروط التى يجب أن تحققها b_1 ، b_2 ، b_3 لكى يكون نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

مـــتآلفاً ؟

الحـــل : المصفوفة الممتدة هى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

ويمكن اختزالها إلى الصورة الصفية المميزة كما يلى :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

تم طرح الصف الاول من الصف الثانى ، وتم طرح ضعف الصف الاول من الصف الثالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

تم ضرب الصف الثانى فى 1 -

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

تمت اضافة الصف الثانى الى الثالث

يتضح الآن من الصف الثالث للمصفوفة أن للنظام حلا إذا وفقط إذا حققت b_1 ، b_2 ، b_3 الشرط $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ أى $b_3 = b_1 + b_2$.

يمكن التعبير عن هذا الشرط بطريقة أخرى : النظام $AX = B$ يكون متآلفاً إذا وفقط إذا كانت B مصفوفة على الصورة

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

حيث b_1 ، b_2 اختياريان .

تمارين ١ — ٧

فى التمارين من ١ إلى ٦ حل النظام باستخدام طريقة مثال (٣٢) .

١ — $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$

٢ — $\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$

٣ — $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

٤ — $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

٥ — $\begin{aligned} \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{5}z &= 1 \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{5}y - \tfrac{4}{5}z &= 2 \\ -\tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{10}z &= 0 \end{aligned}$

٦ — $\begin{aligned} 3w + x + 7y + 9z &= 4 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ -w \qquad - 2y - 3z &= 0 \\ -2w - x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

٧ — حل النظـــام

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 \qquad &= b_3 \end{aligned}$$

عندما : (أ) $b_1 = -1, b_2 = 3, b_3 = 4$ (ب) $b_1 = 5, b_2 = 0, b_3 = 0$

(جـ) $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 3$ (د) $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 3, b_3 = \frac{1}{7}$

٨ — ماهى الشروط التى يجب أن تحققها الثوابت b لكى يكون النظام المعطى متآلفاً .

(أ) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= b_2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(ب) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= b_2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= b_3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= b_4 \end{aligned}$

٩ — اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أن المعادلة $AX = X$ يمكن كتابتها $(A - I)X = 0$ واستخدام هذه النتيجة لحل $AX = X$ بالنسبة للمصفوفة X .

(ب) حل $AX = 4X$.

١٠ – بدون استخدام ورقة وقلم ، حدد ما إذا كانت المصفوفتان التاليتان قابلتين للانعكاس أم لا

$$\text{(أ)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(ب)}\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

إرشاد : خذ فى الاعتبار النظامين المتجانسين المرافقين

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١١ – ليكن $AX = 0$ نظاماً متجانساً ذا n معادلة خطية فى n مجهولا وله الحل التافه فقط . أثبت أنه إذا كان k أى عدد صحيح موجب فإن النظام $A^kX = 0$ أيضاً له الحل التافه فقط .

١٢ – ليكن $AX = 0$ نظاماً متجانساً ذا n معادلة خطية فى n مجهولا ولتكن Q مصفوفة قابلة للانعكاس . أثبت أن للنظام $AX = 0$ الحل التافه فقط إذا وفقط إذا كان للنظام $(QA)X = 0$ الحل التافه فقط .

١٣ – أثبت أن أى مصفوفة A من النوع $n \times n$ تكون قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب مصفوفات بسيطة .

١٤ – استخدم الجزء (أ) من نظرية (١٢) لتبرهن الجزء (ب) .

٢- المحـــــددات

٢ ـ ١ ـ دالة المحـدد

من المألوف لنا جميعاً دوال مثل $f(x) = \sin x$ و $f(x) = x^2$ والتى تقرن عدداً حقيقياً $f(x)$ بمقدار حقيقى للمتغير x . حيث إن كلا من x ، $f(x)$ تأخذ قيما حقيقية فقط ، فيمكن وصف أمثال تلك الدوال بأنها دوال حقيقية لمتغير حقيقى . فى هذا القسم نبدأ فكرة دراسة الدوال الحقيقية لمتغير مصفوفى (متغير من المصفوفات) أى دوال تقرن عدداً حقيقياً $f(X)$ بالمصفوفة X . سنكرس جهدنا الأساسى لدراسة إحدى تلك الدوال التى تسمى دالة المحدد . سيكون لعملنا الخاص بدالة المحدد تطبيقات هامة فى نظرية نظم المعادلات الخطية وسيقودنا إلى صيغة واضحة للمصفوفة العكسية لمصفوفة قابلة للانعكاس .

قبل أن يكون فى استطاعتنا تعريف دالة المحدد ، يلزمنا أن نرسخ بعض النتائج الخاصة بالتبديلات .

تعريف : التبديلة لفئة الأعداد الصحيحة $\{1, 2, \ldots, n\}$ هى أى ترتيب لهذه الأعداد فى تسلسل ما دون حذف أو تكرار .

مثـال (١) :

توجد ست تبديلات لفئة الأرقام $\{1, 2, 3\}$ هذه التبديلات هى

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3) & (2, 1, 3) & (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) & (2, 3, 1) & (3, 2, 1) \end{array}$$

يعتبر استخدام مايسمى بشجرة التبديلات أحد الطرق الملائمة للسرد المنتظم للتبديلات . سيتم توضيح هذه الطريقة فى مثالنا التالى :

مثـال (٢) :

اسرد كل التبديلات لفئة الأعداد $\{1, 2, 3, 4\}$.

الحـل :

خذ فى الاعتبار الشكل ٢ ـ ١ النقاط الأربع المميزة بالأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 فى قمة الشكل تمثل الاختيارات الممكنة للعدد الأول فى التبديلة . الأفرع الثلاثة المنبثقة من هذه النقاط تمثل الاختيارات الممكنة للمكان الثانى فى التبديلة . لذلك ، إذا بدأت التبديلة $(2, -, -, -)$ فتكون الممكنات الثلاثة للمكان الثانى هى 1 ، 3 ، 4 . الفرعان المنبثقان من كل نقطة فى المكان الثانى يمثلان الاختيارات الممكنة للمكان

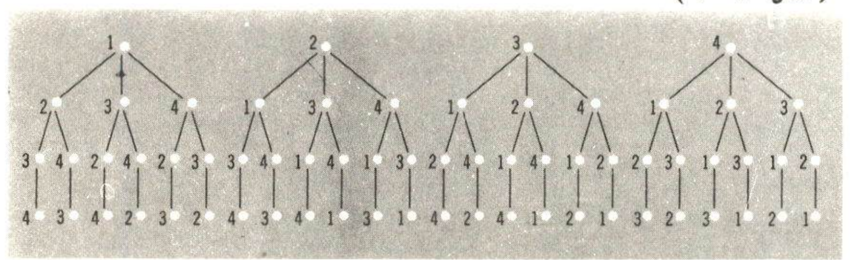
الثالث . لذلك ، إذا بدأت التبديلة $(2, 3, -, -)$ فيكون الاختياران الممكنان للمكان الثالث هما 1 ، 4 . فى النهاية ، الفرع المنفرد المنبثق من كل نقطة فى المكان الثالث يمثل الاختيار الوحيد الممكن للمكان الرابع . لذلك ، إذا بدأت التبديلة $(2, 3, 4, -)$ ، فالاختيار الوحيد للمكان الرابع هو الرقم 1 . ويمكن سرد التبديلات المختلفة الآن بتتبع المسارات الممكنة خلال (الشجرة) من المكان الأول إلى المكان الأخير نحصل بهذه الطريقة على القائمة التالية :

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

نرى من هذا المثال وجود 24 تبديلة لفئة الأعداد $\{1, 2, 3, 4\}$. كان من الممكن توقع هذه النتيجة دون سرد فعلى للتبديلات بالاستدلال كما يلى . حيث إن المكان الأول يمكن أن يملأ بأربع طرق ، ومن ثم يمكن ملء الثانى بثلاث طرق ، فتوجد $4 \cdot 3$ طريقة لملء المكانين الأولين . حيث إن المكان الثالث يمكن أن يملأ بطريقتين فتوجد $4 \cdot 3 \cdot 2$ طريقة لملء الأماكن الثلاثة الأول . فى النهاية ، حيث المكان الأخير يمكن أن يملأ بطريقة واحدة فقط . فتوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ طريقة لملء الأماكن الأربعة كلها . بصفة عامة ، يكون لفئةالأعداد $\{1, 2, \ldots, n\}$ عدد $n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ عدد من التبديلات المختلفة .

سنكتب $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ لنرمز إلى التبديلة العامة للفئة $\{1, 2, \ldots, n\}$ هنا يكون j_1 العدد الأول فى التبديلة ، j_2 العدد الثانى ، الخ . يقال أن **انعكاسا** قد حدث فى التبديلة كلما تقدم رقم أكبر رقا أصغر . يمكن الحصول على العدد الكلى للانعكاسات الحادثة فى تبديلة ما كما يلى :

(شكل ٢ - ١)



١ - أوجد عدد الأرقام الأصغر من j_1 والتى تتبع j_1 فى التبديلة (٢) . أوجد عدد الأرقام الأصغر من j_2 والتى تتبع j_2 من التبديلة . واصل عملية العد هذه للأرقام j_3 ، . . . ، j_{n-1} فيكون مجموع هذه الأرقام هو العدد الكلى للانعكاسات فى التبديلة .

مثال (٣) :

عين عدد الانعكاسات فى التبديلات التالية :

(١) (6, 1, 3, 4, 5, 2) (٢) (2, 4, 1, 3) (٣) (1, 2, 3, 4)

(١) عدد الانعكاسات هو $8 = 5 + 0 + 1 + 1 + 1$

(٢) عدد الانعكاسات هو $3 = 1 + 2 + 0$

(٣) لا يوجد أى انعكاس فى هذه التبديلة .

تعريف : تسمى التبديلة **زوجية** إذا كان العدد الكلى للانعكاسات رقماً زوجيا وتسمى **فردية** إذا كان العدد الكلى للانعكاسات رقماً فردياً .

مثال (٤) :

يصنف الجدول التالى التبديلات المختلفة للفئة $\{1, 2, 3\}$ كتبديلات زوجية وفردية .

التبديلة	عدد الانعكاسات	التصنيف
(1, 2, 3)	0	زوجية
(1, 3, 2)	1	فردية
(2, 1, 3)	1	فردية
(2, 3, 1)	2	زوجية
(3, 1, 2)	2	زوجية
(3, 2, 1)	3	فردية

اعتبر مصفوفة من النوع $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

سنعنى **بحاصل ضرب أولى** من A أى حاصل ضرب لعدد n من عناصر A ، بحيث لا يأتى أى اثنين من هذه العناصر من نفس الصف أو نفس العمود .

مثال (٥) :

اسرد كل حواصل الضرب الأولية من المصفوفتين .

(١) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(١) حيث إنه يوجد عاملان لكل حاصل ضرب أولى ، وحيث إن كل عامل يأتى من صف مختلف ، فيمكن كتابة أى حاصل ضرب أولى على الصورة :

$$a_{1-}a_{2-}$$

حيث تشير الشرط إلى الأعمدة . حيث إنه لا يأتى أى عنصرين فى حاصل الضرب من العمود ، فأرقام الأعمدة يجب أن تكون $\underline{2}\ \underline{1}$ أو $\underline{1}\ \underline{2}$ ولذلك يكون $a_{11}\,a_{22}$ ، $a_{12}\,a_{21}$ هما حاصلا الضرب الأولين الوحيدين .

(٢) حيث إن كل حاصل ضرب أولى له ثلاثة عوامل . كل واحد منهم يأتى من صف مختلف ، فيمكن كتابة أى حاصل ضرب أولى على الصورة .

$$a_{1\text{-}}a_{2\text{-}}a_{3\text{-}}$$

حيث أنه لا يأتى أى عنصرين فى حاصل الضرب من نفس العمود ، فيجب ألا تتكرر أرقام الأعمدة ، وبالتالى فأرقام الأعمدة يجب أن تشكل تبديلة للفئة $\{1, 2, 3\}$. هذه التبديلات وعددها $3! = 6$ تؤدى إلى القائمة التالية لحواصل الضرب الأولية :

$$a_{11}a_{22}a_{33} \qquad a_{12}a_{21}a_{33} \qquad a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$a_{11}a_{23}a_{32} \qquad a_{12}a_{23}a_{31} \qquad a_{13}a_{22}a_{31}$$

كما يوضح هذا المثال ، يكون لأى مصفوفة A من النوع $n \times n$ عدد $n!$ من حواصل الضرب الأولية .

وهذه حواصل الضرب التى على الصورة $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, حيث $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ تبديلة للفئة $\{1, 2, \ldots, n\}$. سنمى **بحاصل ضرب أولى مميز من A** أى حاصل ضرب $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ مضروباً فى $+1$ أو -1 . سنستخدم الإشارة $+$ إذا كانت $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ تبديلة زوجية وسنستخدم الإشارة $-$ إذا كانت $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ تبديلة فردية .

مثال (٦) :

اسرد كل حواصل الضرب الأولية المميزة من المصفوفتين .

(١) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

حاصل الضرب الأولى	التبديلة المرافقة	زوجية أم فردية	حاصل الضرب الأولى المميز
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	زوجية	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	فردية	$-a_{12}a_{21}$

حاصل الضرب الأولى	التبديلة المرافقة	زوجية أم فردية	حاصل الضرب الأولى المميز
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	زوجية	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	فردية	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	فردية	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	زوجية	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	زوجية	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	فردية	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

نحن الآن فى وضع يسمح بتعريف دالة المحدد .

تعريف : لتكن A مصفوفة مربعة . يرمز لدالة المحدد بالرمز **det** ، ونعرف $\det(A)$ بأنه حاصل جمع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A .

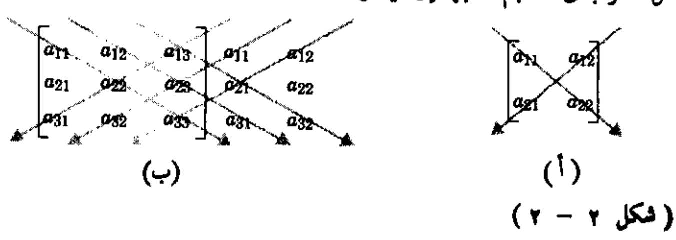
مثال (٧) :

بالرجوع إلى مثال ٦ ، نحصل على

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

من المفيد أن نحصل من هذا المثال على صيغتين متاحتين كرجع معد . تجنبا لاستذكار هذه التعبيرات الضخمة ، نقترح أن نستخدم الحيلة البسيطة الموضحة فى شكل ٢ - ٢ . الصيغة الأولى فى مثال ٧ نحصل عليها من شكل ٢ - ٢ (أ) بضرب العناصر فى السهم المتجه إلى اليمين وطرح حاصل ضرب العناصر فى السهم المتجه إلى اليسار . الصيغة الثانية فى مثال ٧ نحصل عليها باعادة كتابة العمودين الأول والثانى كما هو موضح فى شكل ٢ - ٢ (ب) ، ونحسب المحدد بجمع حواصل الضرب فى الأسهم المتجهة إلى اليمين وطرح حواصل الضرب فى الأسهم المتجهة إلى اليسار .



(ب) (أ)

(شكل ٢ - ٢)

مثال (٨) :

احسب قيمتى محددى المصفوفتين

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

استخدام الطريقة الموضحة فى الشكل ٢ - ٢ (أ) يعطى .

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

استخدام الطريقة الموضحة فى الشكل ٢ - ٢ (ب) يعطى

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

تحـذير : نؤكد على أن الطريقة الموضحة فى شكل ٢ - ٢ لا تصلح لمحددات المصفوفات من النوع 4×4 أو مصفوفات أكبر .

حساب قيم المحددات مباشرة من التعريف يؤدى إلى حسابات صعبة وفى الواقع أن الحساب المباشر لقيمة محدد من أربعة صفوف وأربعة أعمدة يتضمن حساب عدد $4! = 24$ من حواصل الضرب الأولية المميزة وحساب قيمة محدد من عشرة صفوف وعشرة أعمدة تتضمن حساب عدد $10! = 3,628,800$ من حواصل الضرب الأولية المميزة . لا يمكن حتى لأسرع آلاتنا الحاسبة أن تعالج حسابا محددا من خمسة وعشرين صفا وخمسة وعشرين عمودا بهذه الطريقة فى وقت معقول . لذلك سيكون جزء كبير من باقى هذا الباب خاصا باثبات خواص للمحددات تبسط حساب قيمة المحدد . ونختم هذا القسم بملاحظة أن محدد A عادة ما يكتب فى الصورة الرمزية التالية

$$\det(A) = \Sigma \pm a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

حيث تشير Σ إلى أن الحدود يجب أن تجمع لكل التبديلات $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ وتأخذ الإشارة + أو - فى كل حد على حسب كون التبديلة زوجية أو فردية وتعتبر $|A|$ رمزا بديلا لمحدد المصفوفة A بدلا من $\det(A)$ باستخدام هذا الرمز يمكن كتابة محدد المصفوفة A فى مثال ٨ على الصورة

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

تمارين ٢ — ١

١ - أوجد عدد الانعكاسات فى كل من التبديلات الآتية للفئة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(أ) $(3\,4\,1\,5\,2)$ (ب) $(4\,2\,5\,3\,1)$ (جـ) $(5\,4\,3\,2\,1)$

(د) $(1\,2\,3\,4\,5)$ (هـ) $(1\,3\,5\,4\,2)$ (و) $(2\,3\,5\,4\,1)$

٢ - صنف التبديلات فى تمرين ١ من حيث هى زوجية أم فردية

٣ - $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ ٤ - $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ٥ - $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}$ ٦ - $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 4 & k-3 \end{vmatrix}$

٧ - $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ ٨ - $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ ٩ - $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ ١٠ - $\begin{vmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{vmatrix}$

١١ - أوجد كل قيم λ التى عندها $\det(A) = 0$.

(أ) $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}$

١٢ – صنف كل تبديلة للفئة $\{1, 2, 3, 4\}$ كزوجية أو فردية .

١٣ – استخدم نتائج تمرين ١٢ لبناء صيغة لمحدد مصفوفة من النوع 4×4.

١٤ – استخدم الصيغة التى حصلت عليها فى تمرين ١٣ لحساب قيمة محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

١٥ – استخدم تعريف المحدد لحساب قيمة

(أ) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

١٦ – برهن على أنه إذا كان للمصفوفة المربعة A عمود من الأصفار ، فان $\det(A) = 0$.

٢ – ٢ حساب قيم المحددات باختزال الصفوف

نستوضح فى هذا القسم أن محدد أى مصفوفة يمكن حساب قيمته باختزال المصفوفة للصورة الصفية المميزة . هذه الطريقة لها أهمية خاصة حيث إنها تتجنب الحسابات الطويلة المتضمنة فى التطبيق المباشر لتعريف المحدد .

ندرس أولا صنفين من المصفوفات التى يمكن حساب محدداتها بسهولة دون اعتبار لكبر المصفوفة .

نظرية ١ : إذا كانت A مصفوفة مربعة بها صف من الأصفار ، فإن $\det(A) = 0$.

البرهان : حيث إن أى حاصل ضرب أولى مميز من A يحتوى على عامل من كل صف من صفوف A ، فكل حاصل ضرب أولى مميز يحوى عاملا من صف الأصفار وبالتالى تكون قيمته صفرا . حيث أن $\det(A)$ هو مجموع كل حواصل الضرب الأولية المميزة ، فنحصل على $\det(A) = 0$.

تسمى المصفوفة المربعة **مثلثية علوية** إذا كانت كل العناصر تحت القطر الرئيسى أصفارا . وبالمثل ، تسمى المصفوفة المربعة **مثلثية سفلية** إذا كانت كل العناصر فوق القطر الرئيسى أصفاراً . وسواء كانت المصفوفة مثلثية علوية أو مثلثية سفلية فإنها تسمى **مصفوفة مثلثية** .

مثال (٩) :

المصفوفة المثلثية العلوية العامة من النوع 4×4 تكون على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المثلثية السفلية العامة من النوع 4×4 تكون على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

مثال (١٠) :

احسب $\det(A)$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

حاصل الضرب الأولى الوحيد من A الذى يمكن أن يكون غير صفرى هو $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$
لنرى هذا ، اعتبر حاصل الضرب الأولى النمطى $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ حيث إن $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$
فيجب أن يكون عندنا $j_1 = 1$ لكى يكون عندنا حاصل ضرب أولى غير صفرى . إذا كانت $j_1 = 1$
فيجب أن يكون عندنا $j_2 \neq 1$ حيث إنه لا يأتى عاملان من نفس العمود ، وحيث إن $a_{23} = a_{24} = 0$
فيجب أن يكون عندنا $j_2 = 2$ لكى يكون عندنا حاصل ضرب غير صفرى . بالاستمرار بهذه الكيفية
نحصل على $j_3 = 3$ ، $j_4 = 4$ حيث إن $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$ تضرب فى $+1$ فى تكوين حاصل الضرب
الأولى المميز ، فإننا نحصل على

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

يمكن تطبيق الشرح السابق على أى مصفوفة مثلثية لنحصل على النتيجة العامة التالية .

نظرية ٢ : إذا كانت A مصفوفة مثلثية من النوع $n \times n$ فإن $det\,(A)$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى ، أى إن $det\,(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

مثال (١١) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

توضح النظرية التالية تأثير إجراء عملية بسيطة على صف من المصفوفة على قيمة محدد المصفوفة .

نظرية ٣ : لتكن A أى مصفوفة من النوع $n \times n$.

(أ) إذا كانت A' هى المصفوفة الناتجة بضرب صف من A فى ثابت k فان
$$det\,(A') = k\, det\,(A)$$

(ب) إذا كانت A' هى المصفوفة الناتجة بابدال صفين من A فإن $det(A') = -det(A)$

(جـ) إذا كانت A' هى المصفوفة الناتجة بإضافة مضاعف صف من A لصف آخر ، فإن $det(A') = det(A)$.

نحذف البرهان وانظر تمرين ١٥

مثال (١٢) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا حسبنا قيم محددات هذه المصفوفات بالطريقة المستخدمة فى مثال ٨ فإننا نحصل على

$$\det(A) = -2, \quad \det(A_1) = -8, \quad \det(A_2) = 2, \quad \det(A_3) = -2$$

لاحظ أن A_1 نحصل عليه بضرب الصف الأول من A فى 4 ، A_2 نحصل عليه بتبديل الصفين الأولين ، ونحصل على A_3 بطرح ضعف الصف الثالث للمصفوفة A من الصف الثانى . كما تنص النظرية ٣ ، نحصل على العلاقات

$$\det(A_1) = 4\det(A) \qquad \det(A_2) = -\det(A) \qquad \text{and} \qquad \det(A_3) = \det(A)$$

مثال (١٣) :

للتقرير (أ) فى نظرية ٣ تفسير بديل يكون مفيدا فى بعض الأحيان . تسمح لنا هذه النتيجة بإخراج « عامل مشترك » من أى صف لمصفوفة مربعة خارج علامة المحدد . لتوضيح ذلك اعتبر المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

حيث بالصف الثانى للمصفوفة B عامل مشترك k . حيث إن B هى المصفوفة الناتجة بضرب الصف الثانى للمصفوفة A فى k ، فالتقرير (أ) من نظرية ٣ يؤكد على أن $\det(B) = k\det(A)$ أى أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

سنصيغ الآن طريقة بديلة لحساب قيمة المحدد والتي ستتجنب القدر الكبير للحسابات المتضخمة في التطبيق المباشر لتعريف المحدد والفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي أن نطبق عمليات بسيطة على الصفوف لاختزال المصفوفة المعطاة A إلى مصفوفة R تكون في الصورة الصفية المميزة . حيث إن الصورة الصفية المميزة لأي مصفوفة تكون مثلثية علوية (انظر تمرين ١٤) ، فيمكن حساب قيمة $det(R)$ باستخدام نظرية ٢ . ومن ثم يمكن الحصول على $det(A)$ باستخدام نظرية ٣ التي تربط قيمة $\det(A)$ المجهولة بقيمة $\det(R)$ المعلومة . ويوضح المثال التالي هذه الطريقة .

مثال (١٤) :

احسب قيمة $\det(A)$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل : باختزال A إلى الصورة الصفية المميزة وبتطبيق نظرية ٣ ، نحصل على

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

ابدلنا الصفين الأول والثاني للمصفوفة A

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

العامل المشترك 3 من الصف الاول للمصفوفة السابقة أخذناه خارج علامة المحدد (أنظر تمرين ١٣) .

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

طرحنا ضعف الصف الاول للمصفوفة السابقة من الصف الثالث

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

طرحنا عشرة أمثال الصف الثانى للمصفوفة السابقة من الصف الثالث

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

العامل المشترك 55− من الصف الأخير للمصفوفة السابقة أخذناه خارج علامة المحدد

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

مثـال (١٥) :

احسب قيمة $det(A)$ ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

طرحنا ضعف الصف الأول من الصف الثانى

لا نحتاج إلى اختزال آخر إذ أن من نظرية ١ ينتج أن $\det(A) = 0$.

يجب أن يكون واضحاً من هذا المثال أنه حالما كان بالمصفوفة المربعة صفان تناسبيان (مثل الصفين الأول والثانى للمصفوفة A) ، يكون من الممكن إنتاج صف من الأصفار بإضافة مضاعف مناسب لأحدهما إلى الآخر . لذلك ، إذا كان بالمصفوفة المربعة صفان تناسبيان ، فإن محددها يساوى الصفر .

مثـال (١٦) :

كل من المصفوفات التالية بها صفان تناسبيان وإذن بمجرد المعاينة ، محدد كل منها يساوى صفراً .

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

تمارين ٢ — ٢

١ - احسب قيم المحددات التالية بالمعاينة .

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & -40 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(ب) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

فى التمارين من ٢ إلى ٩ احسب قيم محددات المصفوفات المعطاة باختزال المصفوفة إلى الصورة الصفية المميزة .

٢ - $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ ٣ - $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

٤ - $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ ٥ - $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \end{bmatrix}$

٦ - $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & --1 & 0 \end{bmatrix}$ ٧ - $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

٨ - $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ٩ - $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

١٠ - أوجد $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5.$ بافتراض أن

(أ) $\det\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$ (ب) $\det\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$

(جـ) $\det\begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (د) $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

١١ – أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

١٢ – استخدم شرحا مماثلا لذلك المعطى فى مثال ١٠ لإثبات أن

(أ)
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

(ب)
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

١٣ – برهن على أن نظرية (١) تظل صحيحة عندما تستبدل كلمة « صف » بكلمة « عمود » .

١٤ – برهن على أن الصورة الصفية المميزة لمصفوفة مربعة هى مصفوفة مثلثية علوية .

١٥ – برهن الحالات الخاصة التالية لنظرية (٣) .

(أ)
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(ب)
$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(جـ)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

٢ – ٣ خواص دالة المحدد

سندرس فى هذا القسم بعض الخواص الأساسية لدالة المحدد . يعطينا عملنا هنا نظرة متعمقة فى العلاقة بين المصفوفة المربعة ومحددها . إحدى النتائج المباشرة لهذه المادة العلمية ستكون اختبارا ، لقابلية المصفوفة للانعكاس ، باستخدام المحدد .

إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فان **محوره** A ويرمز لها بالرمز A^t تعرف بأنها المصفوفة من النوع $n \times m$ التى عمودها الأول هو الصف الأول للمصفوفة A ، وعمودها الثانى هو الصف الثانى للمصفوفة A ، وعمودها الثالث هو الصف الثالث للمصفوفة A ، الخ .

مثال (١٧) :

محورات المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

هى :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad D^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

بافتراض أن أنواع المصفوفات تكون بحيث يمكن إجراء العمليات المبينة فإن لعملية التحوير الخواص التالية (أنظر تمرين ١٣) .

خواص عملية التحوير :

(١) $(A^t)^t = A$.

(٢) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(٣) $(kA)^t = kA^t$ حيث k أى عدد قياسى .

(٤) $(AB)^t = B^tA^t$.

تذكر أن المحدد لمصفوفة من النوع $n \times n$ يعرف بأنه مجموع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A حيث أن لحاصل الضرب الأولى عاملا واحدا من كل صف وعاملا واحداً من كل عمود ، فمن البديهى أن يكون للمصفوفتين A و A^t نفس فئة حواصل الضرب الأولية . رغم أننا سنحذف التفاصيل ، يمكن إثبات أن للمصفوفتين A و A^t فى الواقع نفس حواصل الضرب الأولية المميزة ، وهذا يؤدى إلى النظرية التالية :

نظرية ٤ : إذا كانت A أى مصفوفة مربعة فإن $det\,(A) = det\,(A^t)$.

بسبب هذه النتيجة توشك كل النظريات عن المحددات التى تحوى فى تقريرها على الكلمة «صف» أن تكون صحيحة أيضاً عندما تحل الكلمة « عمود » محل « صف » لبرهنة تقرير الأعمدة نحتاج فقط إلى تحوير المصفوفة

ليبدل تقرير الأعمدة إلى تقرير صفوف ، ثم تطبق النتيجة المنـــاظرة المعروفة بالنسبة للمصفوفة . لتوضيح الفكرة ، افترض أننا نريد إثبات أن تبديل عمودين للمصفوفة المربعة A يغير إشارة $det\,(A)$. يمكننا السير كما يلي : لتكن A' هي المصفوفة الناتجة عندما يتبدل العمود r والعمود s للمصفوفة A . لذلك تكون $(A')^t$ هي المصفوفة الناتجة عندما يتبدل الصف r والصف s للمصفوفة A^t لذا فإن

$$\begin{aligned} det\,(A') &= det\,(A')^t && \text{(نظرية ٤)} \\ &= -\,det\,(A^t) && \text{(نظرية ٣ ب)} \\ &= -\,det\,(A) && \text{(نظرية ٤)} \end{aligned}$$

وذلك يبرهن النتيجة .

الأمثلة التالية توضح نقاطاً عديدة عن المحددات التي تعتمد على خواص أعمدة المصفوفة .

مثـــال (١٨) :

بالمعاينة ، المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

محددها يساوى صفراً إذ أن العمودين الأول والثانى تناسبيان .

مثـــال (١٩) :

احسب قيمة محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

من الممكن حساب هذا المحدد كما سبق باستخدام عمليات بسيطة على الصفوف لاختزال A إلى صورة صفية مميزة . لكن من ناحية أخرى يمكننا وضع A فى صورة مثلثية سفلية فى خطوة واحدة بطرح ثلاثة أمثال العمود الأول من الرابع لنحصل على

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

يوضح هذا المثال أنه من الحكمة دائماً أن نفطن للعملية الماهرة على الأعمدة التى ستجعل الحسابات قصيرة .

افترض أن A و B مصفوفتان من النوع $n \times n$ وأن k أى عدد قياسى ، سندرس الآن بعض العلاقات الممكنة بين $det\ (A)$ ، $det\ (B)$ والمحددات

$$\det(kA),\quad \det(A+B) \text{ و } \det(AB)$$

حيث أن أى عامل مشترك فى صف من المصفوفة يمكن أخذه خارج علامة المحدد ، وحيث أن كل صف من الصفوف وعددها n بالمصفوفة kA يحتوى العامل المشترك k ، فإننا نحصل على

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{2.1}$$

مثـــال (٢٠) :

اعتبر المصفوفتين

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \text{ ,} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

بالحساب المباشر نجد أن $det\ (A) = 4$ و $det\ (5A) = 100$ يتفق هذا مع العلاقة (2.1) ، والتى تؤكد على أن $det\ (5A) = 5^2\ det\ (A)$.

للأسف ، لاتوجد علاقة بسيطة بين $det\ (A)$ ، $det\ (B)$ و $det\ (A+B)$ فى صورة عامة ، بصفة خاصة نؤكد على أن $det\ (A+B)$ عادة لايساوى $det\ (A) + det\ (A)$. يوضح المثال التالى هذه النقطة .

مثـــال (٢١) :

اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

لدينـــا $det\ (A)=1$ ، $det\ (B) = 8$ و $det\ (A+B) = 23$ لذلك فإن $det\ (A+B) \neq$ $det\ (A) + det\ (B)$ بالرغم من هذه النتيجة السلبية ، توجد نتيجة واحدة مهمة تتعلق بمجموع المحددات غالباً ما تكون مفيدة . للايضاح ، اعتبر المصفوفتين من النوع 2×2

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \text{ ,} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

واللتان تختلفان فقط فى الصف الثانى . من الصيغة فى مثال (٧) ، نحصل على

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(A') &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a'_{22} - a_{12}a'_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + a'_{22}) - a_{12}(a_{21} + a'_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أى أن

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{bmatrix}$$

هذا المثال حالة خاصة من النتيجة العامة التالية :

لتكن A ، A' و A'' مصفوفات من النوع $n\times n$ بحيث تختلف فقط فى صف واحد وليكن الصف r . افترض أن الصف r للمصفوفة A'' يمكن الحصول عليه بجميع العناصر المتناظرة فى الصفين ذات الرقم r للمصفوفتين A ، A' فيكون

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

وتوجد نتيجة مماثلة خاصة بالأعمدة .

مثـــال (٢٢) :

بحساب قيم المحددات ، يمكن للقارىء أن يتأكد من أن

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نظرية ٥ : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من نفس النوع ، فإن :

$$det\ (AB) = det\ (A)\ det\ (B)$$

من المثير للدهشة والإنعاش أن نقابل بين البساطة الطريفة لهذه النتيجة والطبيعة المعقدة لكل من ضرب المصفوفات وتعريف المحددات . سنحذف البرهان .

مثـــال (٢٣) :

اعتبر المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

نجد لدينا أن $det\ (A)\ det\ (B) = (1)(-23) = -23$ ومن ناحية أخرى نجد بالحساب المباشر أن $det\ (AB) = -23$ لذلك فإن $det\ (AB) = det\ (A)\ det\ (B)$.

فى نظرية (١٣) بالباب الأول ، سردنا ثلاثة تقارير هامة والتى تكافىء قابلية المصفوفة للانعكاس . سيساعدنا المثال التالى لإضافة نتيجة أخرى لتلك القائمة .

مثـــال (٢٤) :

الغرض من هذا المثال هو إثبات أنه إذا لم توجد صفوف مكونة بكاملها من أصفار للصورة المميزة

المختزلة R لمصفوفة مربعة ، فإن R يجب أن تكون مصفوفة الوحدة . يمكن توضيح هذا باعتبار المصفوفة التالية من النوع 3×3 والتي نفترض أنها فى الصورة الصفية المميزة المختزلة .

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

أما أن يتكون الصف الأخير فى هذه المصفوفة بكامله من أصفار أو أنه لايكون كذلك . إذا لم يكن ، فإن المصفوفة لاتحوى أى صف صفرى ، وبالتالى يكون لكل صف من الصفوف واحد متقدم . حيث أن هذه الآحاد المتقدمة تحدث باقتراب مطرد إلى اليمين كيفما تتحرك إلى أسفل المصفوفة ، فإن كل واحد من هذه الآحاد يجب أن يحدث على القطر الرئيسى . حيث أن العناصر الأخرى فى نفس العمود الذى فيه أحد هذه الآحاد تكون أصفاراً ، فإن R يجب أن يساوى I . لذلك أما أن يكون R به صف صفرى أو أن $R = I$.

نظرية ٦ : تكون المصفوفة المربعة A قابلة للانعكاس إذا وفقط إذا كان $det\,(A) \neq 0$

البرهان : إذا كانت A قابلة للانعكاس ، فإن $I = AA^{-1}$ ولذلك فإن $1 = det\,(I) = det\,(A)\,det\,(A^{-1})$ ولهذا فإن $det(A) \neq 0$. بالعكس، بافتراض أن $det\,(A) \neq 0$ سنثبت أن A مكافئة صفياً للمصفوفة I ، وعليه نستخلص من نظرية (١٠) بالباب الأول أن A قابلة للانعكاس . لتكن R هى الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A . حيث أنه يمكن الحصول على R من A بواسطة متتابعة منتهية من العمليات البسيطة على الصفوف فيمكننا إيجاد مصفوفات بسيطة E_1 ، E_2 ، . . . ، E_k بحيث تكون $E_k \ldots E_2 E_1\; A = R$ أى $A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}\, R$ لذلك فإن

$$\det(A) = \det(E_1^{-1})\det(E_2^{-1}) \cdots \det(E_k^{-1})\det(R)$$

حيث أننا نفترض أن $det\,(A) \neq 0$ فينتج من هذه المعادلة أن $det\,(R) \neq 0$ لذلك فلا يوجد بالمصفوفة R أى صفوف صفرية ، إذن $R = I$ (أنظر مثال ٢٤) .

نتيجة : إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

البرهان : حيث أن $A^{-1}A = I$ فإن $det\,(A^{-1}A) = det\,(I)$ ، أى أن ، $det\,(A^{-1}) = det\,(A) = 1$ حيث أن $det\,(A) \neq 0$ ، فيمكن تكلة البرهان بقسمة المعادلة بأكلها على $det\,(A)$.

مثـال (٢٥) :

حيث أن الصفين الأول والثالث للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

صفان تناسبيان ، فإن $det\,(A) = 0$ ، لذلك فإن المصفوفة A غير قابلة للانعكاس .

تمارين ٢ ــ ٣

١ ــ أوجد المحورات للمصفوفات :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad [7 \quad 0 \quad 2] \text{ (جـ) } \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ (أ) }$$

٢ ــ حقق نظرية ٤ بالنسبة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

٣ ــ تحقق أن $det\,(AB) = det\,(A)\,det\,(B)$ عندما

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٤ ــ استخدم نظرية ٦ لتعيين أى من المصفوفات التالية قابلة للانعكاس .

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ (جـ) } \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \text{ (أ) }$$

٥ ــ افترض أن $det\,(A) = 5$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

اوجد :

$$\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} \text{ (د) } \quad det\,[(2A)^{-1}] \text{ (جـ) } \quad det(2A^{-1}) \text{ (ب) } \quad det\,(3A) \text{ (أ) }$$

٦ ــ أثبت بدون حساب مباشر أن $x = 0$ و $x = 2$ تحققان

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

٧ ــ أثبت بدون حساب مباشر أن

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

٨ – لأى قيمة (قيم) للثابت k تفشل A أن تكون قابلة للانعكاس ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \qquad A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix} \quad \text{(أ)}$$

٩ – لتكن A ، B مصفوفتين من النوع $n \times n$. أثبت أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن $det\,(B) = det\,(A^{-1}\,BA)$.

١٠ – (أ) أوجد مصفوفة غير صفرية A من النوع 3×3 بحيث تكون $A = A^t$.
(ب) أوجد مصفوفة غير صفرية A من النوع 3×3 بحيث تكون $A = -A^t$.

١١ – ليكن a_{ij} المنصر فى الصف i والعمود j للمصفوفة A . فى أى صف وأى عمود للمصفوفة A^t يظهر a_{ij} .

١٢ – ليكن $AX = 0$ نظاماً لعدد n من المعادلات الخطية ذات n مجهولا . أثبت أن النظام يكون له حل غير تافه إذا وفقط إذا كان $det\,(A) = 0$.

١٣ – لتكن

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أثبت أن

(أ) $(A^t)^t = A$ (ب) $(A + B)^t = A^t + B^t$ (جـ) $(AB)^t = B^t A^t$
(د) $(kA)^t = kA^t$.

١٤ – أثبت أن $(A^t\,B^t) = BA$.

١٥ – تسمى المصفوفة المربعة A مصفوفة متماثلة إذا كانت $A^t = A$ وتسمى شبه متماثلة إذا كانت $A^t = -A$.
أثبت أنه إذا كانت B مصفوفة مربعة فإن :

(أ) BB^t و $B + B^t$ مصفوفتان متماثلتان (ب) $B - B^t$ مصفوفة شبه متماثلة .

٢ – ٤ المفكوك باستخدام المتممات المميزة – قاعدة كرامير

فى هذا القسم سنأخذ فى الاعتبار طريقة أخرى لحساب قيم المحددات . كنتيجة لعملنا هنا ، سنحصل على صيغة لمكوس مصفوفة قابلة للانعكاس كما نحصل أيضاً على صيغة لحل أنظمة معينة للمعادلات الخطية بدلالة المحددات .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة مربعة ، فإن **المحدد المتمم للعنصر** a_{ij} يرمز له بالرمز M_{ij} ويعرف بأنه محدد المصفوفة الجزئية التى تبقى بعد حذف الصف i والعمود j من المصفوفة A . يرمز للعدد $(-1)^{i+j}M_{ij}$ بالرمز C_{ij} (**ويسمى المتمم المميز**) أو (المعامل) **للعنصر** a_{ij} .

مثـال (٢٦) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

المحدد المتمم للعنصر a_{11} هو

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

المتمم المميز (المعامل) للعنصر a_{11} هو

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

بالمثل متمم العنصر a_{32} هو

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

و معامل a_{32} هو

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

لاحظ أن المتمم المميز (المعامل) و المتمم لعنصر ما . a_{ij} يختلفان فقط فى الإشارة أى أن $C_{ij} = \pm M_{ij}$ وطريقة سريعة لتحديد ما إذا كنا سنستخدم الإشارة «+» أم الإشارة «−» هى أن نستخدم الحقيقة أن الإشارة التى تربط C_{ij} و M_{ij} تكون فى الصف i و العمود j فى الترتيب التالى .

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

على سبيل المثال $C_{11} = M_{11}$ ، $C_{21} = -M_{21}$ ، $C_{12} = -M_{12}$ ، $C_{22} = M_{22}$ ، الخ .

اعتبر المصفوفة العامة من النوع 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أثبتنا فى مثال (٧) أن

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.2)$$

ويمكن كتابة ذلك كما يلي :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

حيث أن العبارات التى فى الأقواس هى بالضبط المتممات المميزة C_{11} ، C_{21} ، C_{31} (حقق ذلك) ، فيكون

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \qquad (2.3)$$

نرى من المعادلة (2.3) أن محدد A يمكن حسابه بضرب عناصر العمود الأول للمصفوفة A فى متماتها المميزة وجمع حواصل الضرب الناتجة . هذه الطريقة لحساب قيمة $det\ (A)$ تسمى **فك المحدد باستخدام المتممات المميزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة** A .

مثـــال (٢٧) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

احسب قيمة $det\ (A)$ بالفك باستخدام المتممات المميزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة A .

الحـــل : باستخدام (2.3) نجد أن :

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

بإعادة ترتيب الحدود فى (2.2) بطرق مختلفة ، يمكننا الحصول على صيغ أخرى مثل (2.3) . من المؤكد أنه لن توجد أى صعوبة للتحقق من صحة كل ما يأتى (أنظر تمرين ٢٣) :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

لاحظ أن فى كل معادلة ، كل من العناصر والمتممات المميزة تأتى من نفس الصف أو نفس العمود . تسمى هذه المعادلات **مفكوكات $det\ (A)$ باستخدام المتممات المميزة** .

النتائج التى قد أعطيناها آنفاً للمصفوفات من النوع 3×3 هى حالة خاصة للنظرية العامة التالية ، والتى سنذكر نصها بدون برهان .

نظرية ٧ :

يمكن حساب المحدد للمصفوفة A من النوع $n \times n$ بضرب العناصر فى أى صف (أو عمود) فى متمماتها المميزة وجمع حواصل الضرب الناتجة ، بمعنى أن ، لكل $1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq j \leq n$ فإن

$$det\,(A) = a_{1j}\,C_{1j} + a_{2j}\,C_{2j} + \ldots + a_{nj}\,C_{nj}$$

(المفكوك باستخدام المتممات المميزة لعناصر العمود رقم j)

و

$$det\,(A) = a_{i1}\,C_{i1} + a_{i2}\,C_{i2} + \ldots + a_{in}\,C_{in}$$

(المفكوك باستخدام المتممات المميزة لعناصر الصف رقم i)

مثـــال (٢٨) :

لتكن A المصفوفة التى فى مثال (٢٧) . احسب قيمة $det\,(A)$ بفك المحدد باستخدام المتممات المميزة لعناصر الصف الأول (أى باستخدام مفكوك المحدد من صفه الأول) .

الحـــل :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) = -1$$

يتفق هذا مع النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال (٢٧) .

ملاحظة : لم يكن من الضرورى فى هذا المثال أن نحسب المتمم المميز الأخير ، حيث أنه كان مضروباً فى الصفر . بصفة عامة ، أن أحسن التدابير (الاستراتيجيات) لحساب قيمة المحدد بالفك باستخدام المتممات المميزة ، هى أن نجرى الفك من الصف أو العمود الذى يشتمل على أكبر عدد من الأصفار .

على الرغم من أن الفك باستخدام المتممات المميزة فى العادة ليس له فاعلية الاختزال للصورة المثلثية فى حساب قيمة المحدد ، فيمكن فى بعض الأحيان استخدام الطريقتين معاً فى حالات معينة ، لتؤديا إلى أسلوب حسابى فعال . يوضح المثال التالى هذه الفكرة .

مثـــال (٢٩) :

احسب قيمة $det\,(A)$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} .$$

الحــل : بإضافة مضاعفات مناسبة للصف الثانى إلى الصفوف الأخرى ، نحصل على

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$ **مفكوك المحـــدد من العمود الأول**

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$ **أضفنا الصف الأول الى الصف الثالث**

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$ **مفكوك المحـــدد من العمود الأول**

$$= -18$$

فى المفكوك باستخدام المتممات المميزة نحسب $det\ (A)$ بضرب عناصر صف أو عمود فى متمماتها المميزة ثم جمع حواصل الضرب الناتجة . كأننا نجد أنه إذا ضربت عناصر أى صف فى المتممات المميزة للعناصر المناظرة بصف آخر ، فإن مجموع حواصل الضرب هذه يكون دائماً مساوياً للصفر . (تتحقق هذه النتيجة أيضاً بالنسبة إلى الأعمدة) . رغم أننا سنحذف البرهان فى الحالة العامة ، فإن المثال التالى يوضح فكرة البرهان فى حالة خاصة .

مثــال (٣٠) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اعتبر الكمية

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33}$$

والتى تتشكل بضرب عناصر الصف الأول فى المتممات المميزة للعناصر المناظرة بالصف الثالث ثم جمع حواصل الضرب الناتجة . سنثبت الآن أن هذه الكمية مساوية للصفر . باستخدام الحيلة التالية . ننشىء مصفوفة جديدة A' بإحلال محل الصف الثالث للمصفوفة A نسخة أخرى للصف الأول . لذلك فإن

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

لتكن C'_{31} ، C'_{32} ، C'_{33} هي المتممات المميزة لعناصر الصف الثالث للمصفوفة A' . حيث أن الصفين الأولين للمصفوفتين A ، A' هما نفس الصفين ، وحيث أن حساب قيمة C_{31} ، C_{32} ، C_{33} ، C'_{31} ، C'_{32} ، C'_{33} يتضمن فقط عناصر من الصفين الأولين للمصفوفتين A ، A' فينتج أن

$$C_{31} = C'_{31}, \quad C_{32} = C'_{32}, \quad C_{33} = C'_{33}$$

حيث أن المصفوفة A' بها صفان متماثلان ، فإن

$$\det(A') = 0 \tag{2.5}$$

ومن ناحية أخرى ، حساب قيمة $det\,(A')$ بفك A' باستخدام المتممات المميزة لعناصر الصف الثالث يعطى

$$\begin{aligned} \det(A') &= a_{11}C'_{31} + a_{12}C'_{32} + a_{13}C'_{33} \\ &= a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} \end{aligned} \tag{2.6}$$

من (2.5) ، (2.6) نحصل على

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0$$

تعريف : إذا كانت A أى مصفوفة من النوع $n\times n$ وكان C_{ij} المتمم المميز للعنصر a_{ij} فإن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى **مصفوفة المتممات المميزة من A** . محورة هذه المصفوفة تسمى **المصفوفة المرتبطة بالمصفوفة A** ويرمز لها بالرمز $\mathbf{adj}(A)$.

مثــال (٣١) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

المتممات المميزة لعناصر A هى

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

وإذن مصفوفة المتممات المميزة هى

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المرتبطة هى

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

نحن الآن فى وضع يسمح لنا بإنشاء صيغة لمعكوس مصفوفة قابلة للانعكاس .

نظرية ٨ : إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس ، فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

البرهـــان : سنثبت أولا أن

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I$$

اعتبر حاصل الضرب

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

العنصر فى الصف i والعمود j للمصفوفة $A\,adj(A)$ هو

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \tag{2.7}$$

أنظر (الخطين المظللين أعلاه)

إذا كانت $i = j$ فإن (2.7) يكون هو مفكوك المحدد $\det(A)$ من العمود i للمصفوفة A (أنظر نظرية ٧) . أما إذا كانت $i \neq j$ فإن العناصر a والمتممات المميزة تأتى من صفوف مختلفة للمصفوفة A وبالتالى تكون قيمة (2.7) هى الصفر لذلك فإن

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I \tag{2.8}$$

حيث أن A مصفوفة قابلة للانعكاس ، فإن $\det(A) \neq 0$ لذلك فيمكن كتابة (2.8) كما يلى :

$$\frac{1}{\det(A)} [A \operatorname{adj}(A)] = I$$

أو

$$A \left[\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right] = I$$

وضرب كل من الطرفين من اليسار فى A^{-1} يعطى

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \quad \blacksquare \tag{2.9}$$

مثـــال (٣٢) :

استخدم (2.9) لإيجاد معكوس المصفوفة A فى مثال (٣١) .

الحـــل : يستطيع القارىء التحقق من أن $\det(A) = 64$ لذلك فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه بالنسبة للمصفوفات التىمن نوع أكبر من 3×3 تكون طريقة إيجاد المصفوفة العكسية التى فى هذا المثال من الناحية الحسابية دون الأسلوب المعطى فى قسم ١ ــ ٦ . من ناحية أخرى فإن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية فى قسم ١ ــ ٦ هى مجرد إجراء حسابى أو منهج لحساب A^{-1} وليس لها فائدة كبيرة فى دراسة خواص المعكوس . يمكن استخدام الصيغة 2.9 للحصول على خواص المعكوس دون حساب فعلى له (أنظر تمرين ٢٠) .

بنزعة مماثلة ، غالباً ما يكون من المفيد أن نحصل على صيغة كل أنظمة المعادلات الخطية والتى يمكن استخدامها لدراسة خواص الحل دون إيجاد حل للنظام . تعطينا النظرية التالية مثل هذه الصيغة لنظام من n من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل . تعرف الصيغة بأنها قاعدة كرامير .

نظرية ٩ : (قاعدة كرامير)

إذا كان $AX=B$ نظاماً من n من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل بحيث أن $\det(A) \neq 0$ ، فيكون للنظام حل وحيد وهذا الحل هو

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

حيث A_j هى المصفوفة الناتجة بإحلال عناصر العمود j للمصفوفة A محل عناصر المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

البرهان : إذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن A تكون قابلة للانعكاس، وبنظرية 11 بالقسم ١ − ٧ ، يكون $X = A^{-1}B$ الحل الوحيد للمعادلة $AX = B$. وإذن باستخدام نظرية (٨) نحصل على

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)B = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

وبإجراء ضرب المصفوفتين نحصل على

$$X = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

وإذن العنصر في الصف j للمصفوفة X يكون

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{2.10}$$

والآن لتكن

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أن A_j تختلف عن A فقط في العمود j ، فتكون المتممات المميزة للعناصر b_1 ، b_2 ، . . . ، b_n في المصفوفة A_j هي نفس المتممات المميزة للعناصر المناظرة في العمود j للمصفوفة A . لذلك ففكوك المحدد $\det(A_j)$ من العمود j يكون على الصورة

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

التعويض بهذه النتيجة في (2.10) يعطى

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

مثـــال (٢٣) :

استخدم قاعدة كرامير لحل

$$\begin{aligned} x_1 + + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

الحـل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

من الضرورى لحل نظام من n من المعادلات فى n من المجاهيل ، أن نحسب قيم $n+1$ من المحددات لمصفوفات من النوع $n \times n$. بالنسبة للأنظمة ذات أكثر من ثلاث معادلات ، تعتبر طريقة جاوس للحذف من الناحية الحسابية أعلى شأناً حيث أنه من الضرورى فقط اختزال مصفوفة ممتدة واحدة من النوع $n \times (n+1)$ مع ذلك ، فإن قاعدة كرامير تعطى صيغة للحل .

تمارين ٢ — ٤

١ – لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد كل المتممات (ب) أوجد كل المتممات المميزة

٢ – لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد

(أ) M_{13} و C_{13} (ب) M_{23} و C_{23} (جـ) M_{22} و C_{22} (د) M_{21} و C_{21}

٣ – احسب قيمة محدد المصفوفة المعطاة فى تمرين (١) بفك المحدد من :

(أ) الصف الأول (ب) العمود الأول (جـ) الصف الثانى

(د) العمود الثانى (هـ) الصف الثالث (و) العمود الثالث

٤ – بالنسبة للمصفوفة فى تمرين ١ ، أوجد

(أ) $\operatorname{adj}(A)$ (ب) A^{-1} وذلك باستخدام طريقة مثال (٣٢).

احسب فى التمارين من ٥ إلى ١٠ قيمة $\det(A)$ ، بفك المحدد من صف أو عمود من اختيارك .

٥ – $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

٦ – $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

٧ – $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$

٨ – $\begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$

٩ – $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

١٠ – $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

١١ – لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(أ) احسب قيمة A^{-1} باستخدام طريقة مثال ٣٢ .

(ب) احسب قيمة A^{-1} باستخدام طريقة مثال ٢٩ بالقسم ١ – ٦ .

(جـ) أى الطريقتين تتضمن حسابات أقل ؟

فى التمارين من ١٢ إلى ١٧ ، استخدم قاعدة كرامير إذا كان يمكن تطبيقها لحل نظم المعادلات .

١٢ –
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

١٣ –
$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

١٤ –
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{aligned}$$

١٥ –
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١٦ –
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -32 \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= 14 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -4 \end{aligned}$$

١٧ –
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 15 \end{aligned}$$

١٨ - استخدم قاعدة كرامير لحل النظام بالنسبة إلى z بدون الحل بالنسبة إلى w, y, x

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

١٩ - ليكن $AX = B$ هو النظام المعطى فى تمرين (١٨) :

(أ) حل النظام باستخدام قاعدة كرامير .

(ب) حل النظام باستخدام طريقة جاوس - جوردان للحذف .

(جـ) أى الطريقتين تتضمن أقل كمية من الحسابات ؟

٢٠ - برهن على أنه إذا كان $\det(A) = 1$ وكانت عناصر A كلها أعداداً صحيحة فإن عناصر A^{-1} تكون كلها أعداداً صحيحة .

٢١ - ليكن $AX=B$ نظاماً من n معادلة خطية فى n مجهولا بمعاملات وثوابت من الأعداد الصحيحة . أثبت أن $\det(A) = 1$ ، ومن ثم فتكون عناصر الحل X أعداداً صحيحة .

٢٢ - برهن على أنه إذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية وقابلة للانعكاس ، فإن A^{-1} مثلثية علوية .

٢٣ - اشتق المفكوكين الأول والأخير الواردين فى (2.4) .

٢٤ - أثبت أنه يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (a_1, b_1) ، (a_2, b_2) على الصورة .

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٢٥ - أثبت أن النقط الثلاث (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) تقع على خط مستقيم إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٢٦ - أثبت أن معادلة المستوى المار بالنقط (a_1, b_1, c_1) ، (a_2, b_2, c_2) ، (a_3, b_3, c_3) والتى لاتقع على استقامة واحدة يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٣ - المتجهات فى الفضاء الثنائى والفضاء الثلاثى

يمكن للقارىء المتعرف على محتويات هذا الفصل أن يتجه مباشرة إلى الفصل الرابع دون أن يفقد تتبعه للموضوع .

٣ — ١ مقدمة فى المتجهات (هندسية)

تعرض فى هذا القسم المتجهات فى الفضاء الثنائى والفضاء الثلاثى عرضاً هندسياً . وتعرف العمليات الحسابية على المتجهات وتستنبط بعض الخواص الأساسية لهذه العمليات .

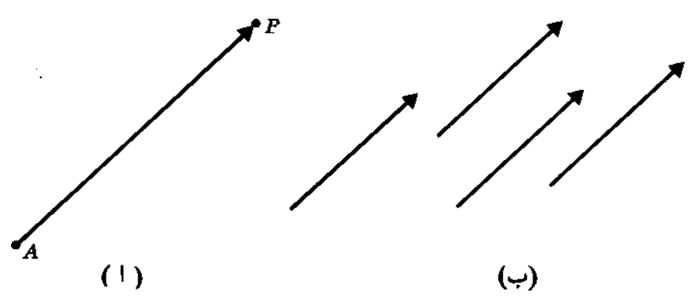
يوصف الكثير من الكميات الطبيعية مثل المساحة والطول والكتلة وصفاً كاملا بمجرد إعطاء عدد حقيقى يمثل مقدار الكمية ولا تحدد كميات طبيعية أخرى ، والتى تسمى **بمتجهات** ، تحديداً تاماً إلا عند تخصيص المقدار والاتجاه . والقوة والإزاحة والسرعة أمثلة للمتجهات .

ويمكن تمثيل المتجه هندسياً كجزء من خط مستقيم أو كسهم موجه فى الفضاء الثنائى أو الفضاء الثلاثى . ويعين اتجاه السهم اتجاه المتجه بينما يصف طول السهم قيمة المتجه . ويسمى ذيل السهم **بنقطة البداية** للمتجه ورأس السهم **بنقطة النهاية** . وسوف نرمز للمتجهات بحروف صغيرة مميزة $\mathbf{a}, \mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ وعند مناقشة المتجهات سوف نشير إلى الأعداد **ككميات قياسيه** . كل الكميات القياسية التى سنستخدمها ستكون أرقاما حقيقية وسوف نرفر لها بالحروف العادية الصغيرة a, k, v, w, x

إذا كانت نقطة البداية للمتجه $\mathbf{v}$ هى A ونقطة النهاية هى B كما فى شكل ٣ – ١ أ ، فإننا نكتب

$$\mathbf{v} = AB$$

تسمى المتجهات التى لها نفس الطول ونفس الاتجاه ، كتلك المتجهات فى شكل ٣ – ١ ب **بمتجهات متكافئة** . وحيث أننا نريد أن يحدد المتجه فقط بطوله وباتجاهه فإن المتجهات المتكافئة تعتبر **متساوية** حتى وإن كانت تقع فى أماكن مختلفة .



(شكل ٣ – ١) (أ) المتجه AB (ب) متجهات متكافئة

إذا كان **v** و **w** متجهين متكافئين فإننا نكتب

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

تعريف : إذا كان **v** و **w** أى متجهين فإن **المجموع** **v** + **w** هو المتجه الذى يحدد كما يلى . ضع المتجه **w** بحيث تكون نقطة بدايته منطبقة على نقطة نهاية **v** . يمثل المتجه **v** + **w** بالسهم الواصل من نقطة بداية **v** إلى نقطة نهاية **w** (شكل ٣ – ٢ أ) .

فى شكل ٣ – ٣ كونا المجموعتين **v** + **w** و **w** + **v** من الواضح أن

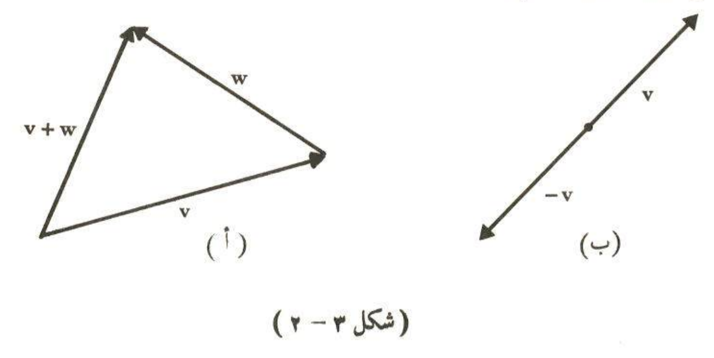
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

وأن المجموع ينطبق على قطر متوازى الأضلاع المحدد من **v** و **w** عندما يوضع هذان المتجهان بحيث يكون لهما نفس نقطة البداية .

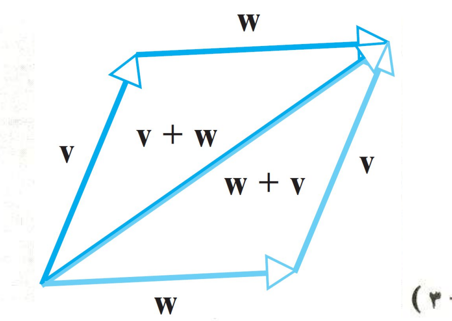
يسمى المتجه الذى طوله صفر **بالمتجه الصفرى** ويرمز له بالرمز **0** . ونعرف

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

لكل متجه **v** . وحيث أنه لايوجد اتجاه طبيعي للمتجه الصفرى فإننا سوف نتفق أنه يمكن أن يأخذ أى اتجاه يكون مناسباً للمسألة تحت الاعتبار .



(شكل ٣ – ٢)



(شكل ٣ – ٣)

إذا كان $\mathbf{v}$ هو أى متجه غير صفرى فن الواضح أن المتجه الوحيد $\mathbf{w}$ الذى يحقق أن $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ هو المتجه الذى له نفس المقدار مثل $\mathbf{v}$ ولكنه يتجه للعكس (شكل ٣ – ٢ ب) . يسمى هذا المتجه **بسالب** $\mathbf{v}$ **(أو المعكوس بالنسبة للجمع للمتجة** $\mathbf{v}$) ونكتب

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v}$$

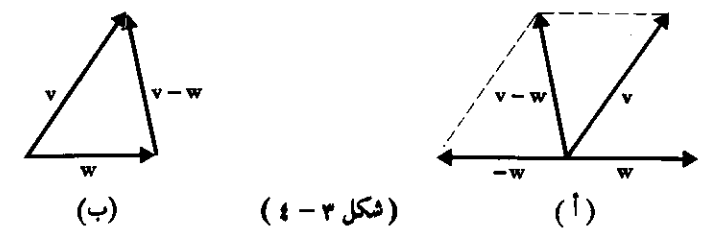
بالإضافة إلى ذلك فإننا نعرف $\mathbf{0} = \mathbf{0} -$.

تعريف : إذا كان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ أى متجهين فإن الطرح يعرف بواسطة

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

(انظر شكل ٣ – ٤ أ)

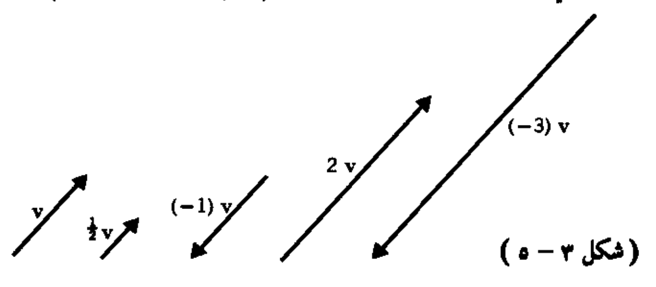
لحصول على الفرق $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ بدون تكوين $-\mathbf{w}$ ، ضع $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بحيث تنطبق نقطتا البداية لهما فيكون المتجه من نقطة نهاية $\mathbf{w}$ إلى نقطة نهاية $\mathbf{v}$ هو المتجه $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (شكل ٣ – ٤ ب) .



(ب) (شكل ٣ – ٤) (أ)

تعريف : إذا كان $\mathbf{v}$ متجه و k عدد حقيقى (قياسى) فإن **حاصل الضرب** $k\,\mathbf{v}$ يعرف بأنه المتجه الذى طوله $|k|$ من المرات طول $\mathbf{v}$ واتجاهه هو نفس اتجاه $\mathbf{v}$ إذا كان $k > 0$ وعكس اتجاه $\mathbf{v}$ إذا كان $k < 0$ ونعرف $k\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ إذا كان $k = 0$ أو $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

يبين شكل ٣ – ٥ العلاقة بين متجه $\mathbf{v}$ والمتجهات $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ ، $(-1)\,\mathbf{v}$ ، $2\,\mathbf{v}$ و $(-3)\,\mathbf{v}$.



(شكل ٣ – ٥)

لاحظ أن المتجه $(-1)\,\mathbf{v}$ له نفس الطول مثل $\mathbf{v}$ ولكنه يتجه للعكس لهذا فإن $(-1)\,\mathbf{v}$ هو بالضبط سالب $\mathbf{v}$ أى أن

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

يمكن عادة تبسيط المسائل المحتوية على متجهات بإدخال نظام إحداثيات متعامدة . سوف نقصر المناقشة فى هذه المرحلة على المتجهات فى الفضاء الثنائى (المستوى) . اعتبر أن **v** هو أى متجه فى المستوى وأفرض ، كما فى شكل ٣ – ٦ ، أن **v** قد وضع بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل لنظام إحداثيات متعامدة . يسمى الإحداثيان $(v_1 ، v_2)$ لنقطة نهاية **v** بمركبتى **v** ، ونكتب .

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

إذا وضع متجهان متكافئان **v** و **w** بحيث تقع نقطتا البداية لهما عند نقطة الأصل فإنه من الواضح أن نقطتى النهاية لهما يجب أن تنطبقا (حيث أن المتجهين لهما نفس الطول والاتجاه) . ولهذا يكون للمتجهين نفس المركبتين . وبنفس الوضوح فإن المتجهات التى لها نفس المركبات يجب أن يكون لها نفس الطول ونفس الاتجاه ومن ثم تكون متكافئة وملخص ذلك هو أن المتجهين

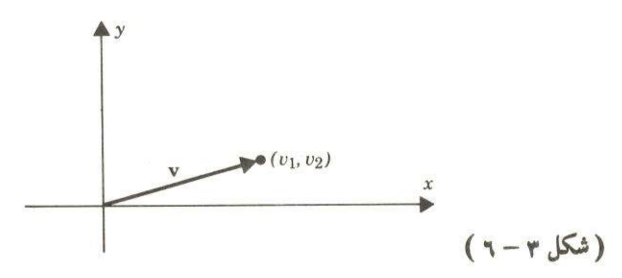
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

يكونان متكافئين إذا كان وفقط إذا كان

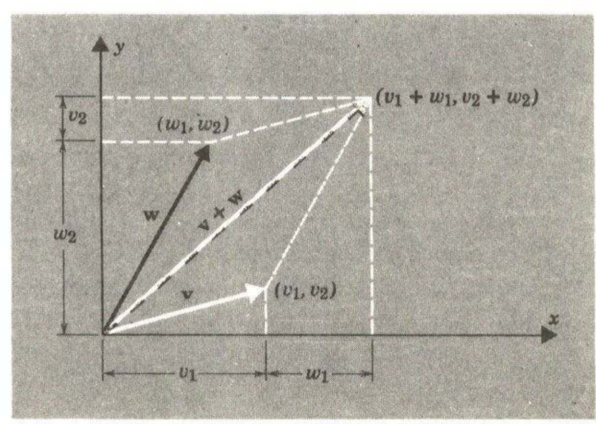
$$v_2 = w_2 \quad \text{و} \quad v_1 = w_1$$

ويمكن بسهولة إجراء عمليات جمع المتجهات والضرب فى أعداد قياسية بدلالة المركبات . كما هو مبين فى شكل ٣ – ٧ إذا كان

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$



(شكل ٣ – ٦)



(شكل ٣ – ٧)

فإن

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

إذا كان $\mathbf{k,v} = (v_1, v_2)$ أى عدد قياسى فإنه باستخدام المفاهيم الهندسية المتعلقة بالمثلثات المتماثلة يمكن أن نثبت (تمرين ١٤) أن

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$$

(أنظر شكل ٣ – ٨)

فمثلا إذا كان $\mathbf{v} = (1, -2)$ ، $\mathbf{w} = (7, 6)$ فإن

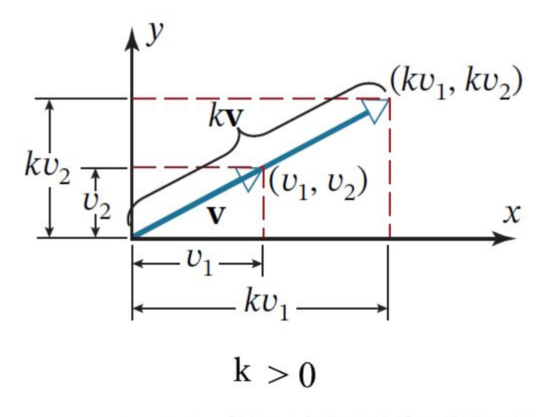
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

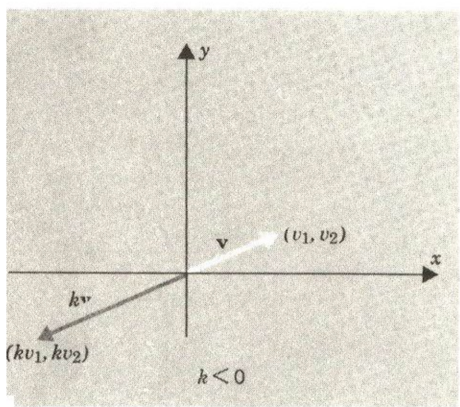
و

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

و كما أنه يمكن تمثيل المتجهات فى المستوى بأزواج من الأعداد الحقيقية فإن المتجهات فى الفضاء الثلاثى يمكن تمثيلها بثلاثيات من الأعداد الحقيقية . بإدخال نظام **احداثيات متعامدة** .

(شكل ٣ – ٨)



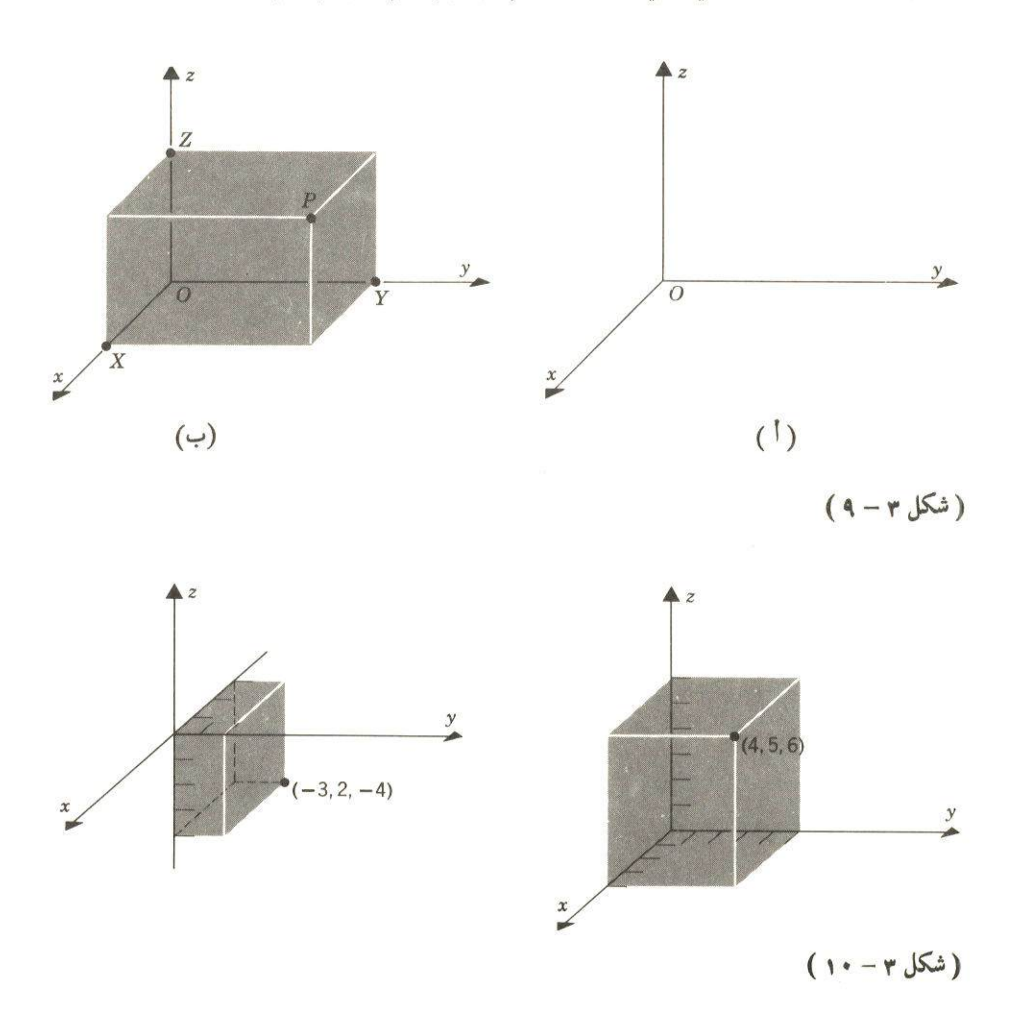


لإنشاء نظام الإحداثيات هذا ، اختر نقطة O تسمى **بنقطة الأصل** . ثم اختر ثلاثة مستقيمات متعامدة مثنى مثنى ، تسمى **بمحاور الاحداثيات** ، مارة بنقطة الأصل . عنون هذه المحاور x ، y ، z ثم اختر اتجاهاً موجباً يكون محور إحداثيات وأيضاً وحدة طول لقياس المسافات (شكل ٣ – ٩ أ) . يحدد كل زوج من محاور الاحداثيات مستوياً يسمى **بمستوى الأحداثيات** وهذه المستويات يشار إليها **بمستوى** xy **ومستوى** xz **ومستوى** yz . وتحدد لكل نقطة P فى الفضاء الثلاثى ثلاثية من الأعداد (x, y, z) تسمى **بأحداثيات** P كما يلى ، مرر ثلاثة مستويات بالنقطة P موازية لمستويات احداثيات ثم ارمز لنقط تقاطع هذه المستويات مع محاور

الأحداثيات الثلاثة بالرموز X و Y و Z (شكل ٣ – ٩ ب) تعرف إحداثيات P بأنها الأطوال المأخوذة بإشاراتها

$$x = OX \qquad y = OY \qquad z = OZ$$

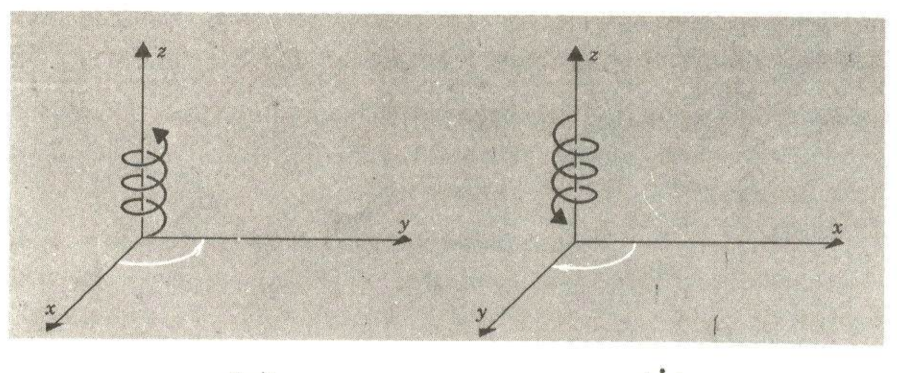
فى شكل ٣ – ١٠ وقعنا النقطتين اللتين إحداثياتهما $(4, 5, 6)$ و $(-3, 2, -4)$ ،



(شكل ٣ – ٩)

(شكل ٣ – ١٠)

تنقسم أنظمة الأحداثيات المتعامدة فى الفضاء الثلاثى إلى قسمين وهما **محاور اليد اليمنى ومحاور اليد اليسرى** . يتميز نظام اليد اليمنى بأن البريمة العادية الموضوعة فى الاتجاه الموجب لمحور z تسير إلى أعلى إذا دار الاتجاه الموجب لمحور x $90°$ إلى الاتجاه الموجب لمحور y (شكل ٣ – ١١ أ) . ويعتبر النظام ذويد يسرى إذا تراجعت إلى أسفل شكل ٣ – ١١ ب .



(ب)   (أ)

(شكل ٣ – ١١) (أ) محاور اليد اليمنى   (ب) محاور اليد اليسرى

فى هذا الكتاب سوف نستخدم فقط أنظمة إحداثيات اليد اليمنى .

إذا وقع المتجه **v** فى الفضاء الثلاثى ، كما فى (شكل ٣ – ١٢) ، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل لنظام إحداثيات متعامدة فإن إحداثيات نقطة النهاية تسمى **بمركبات** **v** ونكتب

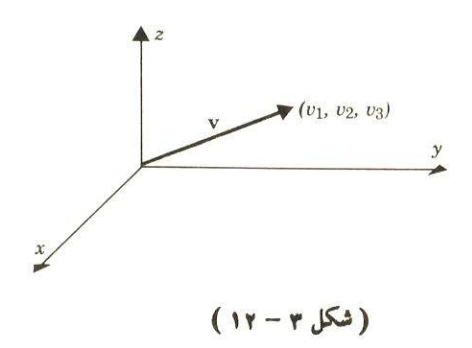
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

إذا كان $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ متجهين فى الفضاء الثلاثى فيمكن بتطبيق برهان مماثل للبرهان المستعمل للمتجهات فى المستوى إثبات النتائج التالية .

(١) **v** و **w** متكافئان إذا كان وفقط إذا كان $v_1 = w_1$ ، $v_2 = w$ ، $v_3 = w_3$

(٢) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

(٣) $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ لأى عدد قياسى k



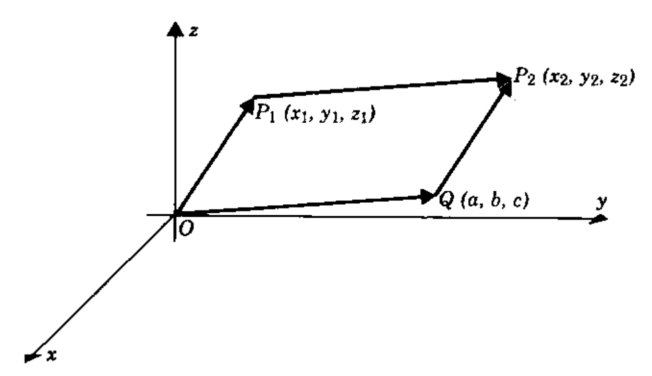
(شكل ٣ – ١٢)

مثـال (١) :

اذا كان $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ و كان $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$ فان

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \quad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \quad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1),$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1).$$

تظهر فى بعض الأحيان متجهات نقطة البداية لها ليست عند نقطة الأصل . لايجاد مركبات متجه $\mathbf{v}$ نقطة بدايته هى $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $P_2(x_2, y_2, z_2)$ فإننا نكون متجهاً مكافئاً نقطة بدايته عند نقطة الأصل . (فى شكل ٣ - ١٣) $\overline{OQ}$ هو هذا المتجه . وإذا مركبات $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$ هى الأحداثيات (a, b, c) للنقطة Q .



(شكل ٣ - ١٣)

من شكل ٣ - ١٣ $\overline{OQ} + \overline{OP}_1 = \overline{OP}_2$ ، أو بدلالة المركبات

$$(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

أو

$$(a + x_1, b + y_1, c + z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة والحل بالنسبة إلى a ، b و c نحصل على أن المركبات (a, b, c) للمتجه $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$ تعطى كما يلى :

$$a = x_2 - x_1 \qquad b = y_2 - y_1 \qquad c = z_2 - z_1$$

مثـال (٢) :

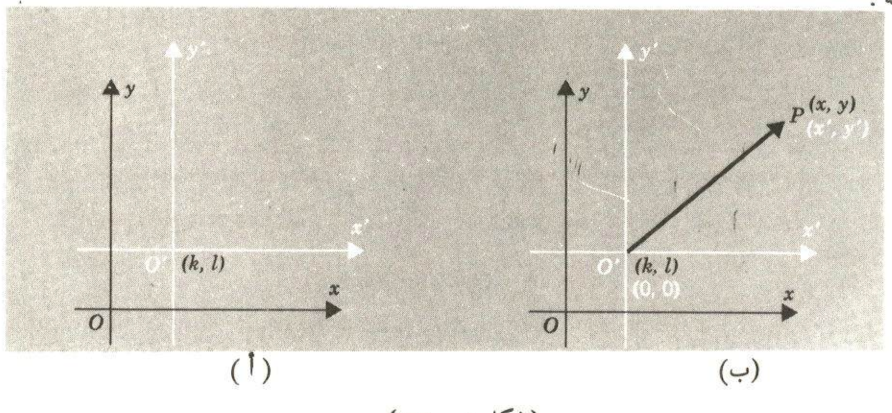
مركبات المتجه $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$ الذى نقطة بدايته $P_1\,(2, -1, 4)$ ونقطة نهايته $P_2(7, 5, -8)$ هى

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)$$

بالمثل فى الفضاء الثنائى مركبتا المتجه $\mathbf{v}$ الذى نقطة بدايته $P_1(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $P_2(x_2, y_2)$ هما $\mathbf{v} = (x_2 - x_1, x_1\ y_2 - y_1)$.

مثـــال (٣) :

يمكن تبسيط حلول الكثير من المسائل بنقل محاور الأحداثيات للحصول على محاور جديدة موازية للمحاور الأصلية .



(أ) (ب)

(شكل ٣ – ١٤)

فى شكل ٣ – ١٤ أ نقل محوراً إحداثيات x ، y للحصول على نظام إحداثيات $x'\,y'$ نقطة الأصل له O' عند النقطة $(x, y) = (k, l)$. ويكون للنقطة P فى الفضاء الثنائى الآن الاحداثيان (x, y) وأيضاً الاحداثيان (x', y') . لإيجاد العلاقة بينهما ، اعتبر المتجه $\overrightarrow{O'P}$ (شكل ٣ – ١٤ ب) . فى نظام الأحداثيات xy تكون النقطة بدايته عند (k, l) ونقطة نهايته عند(x, y)، ومن ثم $\overrightarrow{OP} = (x - k, y - l)$. فى نظام الاحداثيات $x'\,y'$ تكون نقطة بدايته عند $(0, 0)$ ونقطة نهايته عند (x', y') ومن ثم $\overrightarrow{OP} = (x', y')$. وإذن

$$x' = x - k \qquad y' = y - l$$

تسمى هاتان المعادلتان **بمعادلتى الانتقال .**

وللتوضيح إذا كانت نقطة الأصل الجديدة عند $(k, l) = (4, 1)$ وكان الاحداثيان فى النظام xy للنطقة P هما $(2, 0)$ فإن الاحداثيين فى النظام $x'\,y'$ للنقطة P هما

$$x' = 2 - 4 = -2 \quad \text{و} \quad y' = 0 - 1 = -1$$

فى الفضاء الثلاثى تكون معادلات الانتقال هى

$$x' = x - k \qquad y' = y - l \qquad z' = z - m$$

حيث (k, l, m) هى الاحداثيات فى النظام $x\,y\,z$ لنقطة الأصل الجديدة .

تمـــارين ٣ ـــ ١

١ – ارسم نظام إحداثيات يد يمنى وحدد مواقع النقط التى إحداثياتها هى :

(أ) $(2, 3, 4)$ (ب) $(-2, 3, 4)$ (جـ) $(2, -3, 4)$ (د) $(2, 3, -4)$
(هـ) $(-2, -3, 4)$ (و) $(-2, 3, -4)$ (ز) $(2, -3, -4)$ (ح) $(-2, -3, -4)$
(ط) $(0, 2, 0)$ (ى) $(0, 0, -2)$ (ك) $(2, 0, 2)$ (ل) $(-2, 0, 0)$

٢ – ارسم المتجهات التالية بحيث تكون نقطة بداياتهم عند نقطة الأصل :

(أ) $v_1 = (2, 5)$ (ب) $v_2 = (-3, 7)$ (جـ) $v_3 = (-5, -4)$
(د) $v_4 = (6, -2)$ (هـ) $v_5 = (2, 0)$ (و) $v_6 = (0, -8)$
(ز) $v_7 = (2, 3, 4)$ (ح) $v_8 = (2, 0, 2)$ (ط) $v_9 = (0, 0, -2)$

٣ – أوجد مركبات المتجهات التى نقطة البداية لها P_1 ونقطة النهاية لها P_2

(أ) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$ (ب) $P_1(7, -2), P_2(0, 0)$
(جـ) $P_1(6, 5, 8), P_2(8, -7, -3)$ (د) $P_1(0, 0, 0), P_2(-8, 7, 4)$

٤ – أوجد متجها تكون نقطة بدايته $P(2, -1, 4)$ وله نفس الاتجاه مثل المتجه $\mathbf{v} = (7, 6, -3)$.

٥ – أوجد متجهاً يكون معاكساً فى الاتجاه للمتجه $\mathbf{v} = (-2, 4, -1)$ ونقطة نهايته $Q(2, 0, -7)$.

٦ – اعتبر أن $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ، $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$ ، $\mathbf{w} = (3, 2, -1)$. أوجد مركبات

(أ) $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ (ب) $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ (جـ) $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$
(د) $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$ (هـ) $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$ (و) $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

٧ – اعتبر أن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ هى متجهات تمرين (٦) . أوجد مركبات المتجه $\mathbf{x}$ الذى يحقق أن

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}.$$

٨ – اعتبر أن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ هى متجهات تمرين (٦) . أوجد الأعداد القياسية c_1 ، c_2 ، c_3 بحيث يكون

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (6, 14, -2).$$

٩ – أثبت أنه لاتوجد أعداد قياسية c_1 ، c_2 ، c_3 بحيث يكون

$$c_1(1, 2, -3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, -2) = (4, 5, 0).$$

١٠ – أوجد كل الأعداد القياسية c_1 ، c_2 ، c_3 بحيث يكون

$$c_1(2, 7, 8) + c_2(1, -1, 3) + c_3(3, 6, 11) = (0, 0, 0).$$

١١ – اعتبر أن P هى النقطة $(2, 3, -2)$ وأن Q هى النقطة $(7, -4, 1)$.
(أ) أوجد منتصف الخط المستقيم الواصل بين P و Q .
(ب) أوجد النقطة التى تقسم المسافة بنسبة $3/4$ من P إلى Q .

١٢ – افرض أن نظام الأحداثيان $x\ y$ قد انتقل إلى نظام الأحداثيان $x'\ y'$ الذى نقطة الأصل له O' لها الأحداثيان $(2, -3)$.

(أ) أوجد الأحداثيان $x'\ y'$ للنقطة P التى أحداثياها xy هى $(7, 5)$.

(ب) أوجد الأحداثيان xy للنقطة Q التى إحداثياها $x'\ y'$ هى $(-3, 6)$.

(جـ) ارسم محاور الأحداثيان xy و $x'y'$ وحدد موقع النقطتين P ، Q .

١٣ – افرض أن نظام الإحداثيات xyz قد انتقل إلى نظام الاحداثيات $x'y'z'$

اعتبر أن $\mathbf{v}$ أى متجه له المركبات $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ فى النظام $x\ y\ z$.

أثبت أن $\mathbf{v}$ له نفس المركبات فى النظام $x'y'z'$.

١٤ – أثبت هندسياً أنه إذا كان $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ فإن $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$ (اقصر البرهان على الحالة $k > 0$ المبينة فى شكل ٣ – ٨ . يشمل البرهان الكامل كثيراً من الحالات التى تعتمد على الربع الذى يقع فيه المتجه وعلى إشارة k) .

٣ – ٢ مقياس المتجه ، حساب المتجهات (العمليات الحسابية للمتجهات)

فى هذا القسم نوجد القواعد الأساسية لحساب المتجهات .

نظرية ١ :

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ متجهات فى فضاء ثنائى أو ثلاثى وكان k و l عددين قياسيين ، فإن العلاقات التالية تكون متحققة .

(أ) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ب) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(جـ) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(د) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(هـ) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(و) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(ز) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

(ح) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

قبل مناقشة البرهان نلاحظ أننا قدمنا طريقتين لدراسة المتجهات : طريقة هندسية وتمثل فيها المتجهات كأسهم أو كخطوط مستقيمة متجهة ، وطريقة تحليلية . وتمثل فيها المتجهات كأزواج أو كثلاثيات من الأعداد تسمى بمركبات . وكنتيجة لهذا فإن نظرية (١) يمكن أن تثبت إما هندسياً وإما تحليلياً . ولتوضيح هذا سوف نثبت الجزء (ب) بالطريقتين . وسوف نترك بقية البراهين كتمرينات .

إثبات الجزء (ب) (تحليلياً) . سنعطى البرهان فى حالة المتجهات فى الفضاء الثلاثى . ويكون البرهان فى الفضاء الثنائى مماثلا . إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ فإن

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\ &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) \\ &= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\ &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

إثبات الجزء (ب) (هندسياً) . اعتبر آن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ تمثل بالمتجهات $\overrightarrow{PQ}$ ، $\overrightarrow{QR}$ ، $\overrightarrow{RS}$ كما هو مبين فى شكل ٣ – ١٥ . فيكون

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{QS} \quad \text{و} \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{PS}$$

وأيضاً

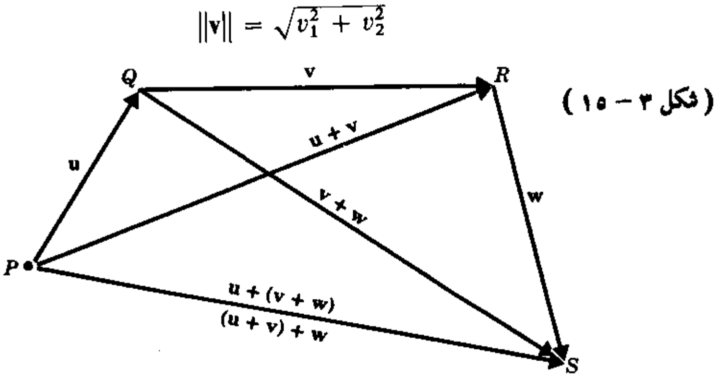
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} \quad \text{و} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{PS}$$

وإذن

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad \blacksquare$$

يسمى طول المتجه $\mathbf{v}$ عادة بمقياس $\mathbf{v}$ ويرمز له بالرمز $\|\mathbf{v}\|$. ينتج من نظرية فيثاغورث أن مقياس المتجه $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ فى الفضاء الثنائى هو

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



(شكل ٣ – ١٥)

(أنظر شكل ٣ – ١٦ أ) . اعتبر أن $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ متجه فى الفضاء الثلاثى . باستخدام شكل ٣ – ١٦ ب وبتطبيق نظرية فيثاغورث مرتين نحصل على

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= (OR)^2 + (RP)^2 \\ &= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\end{aligned}$$

وإذن

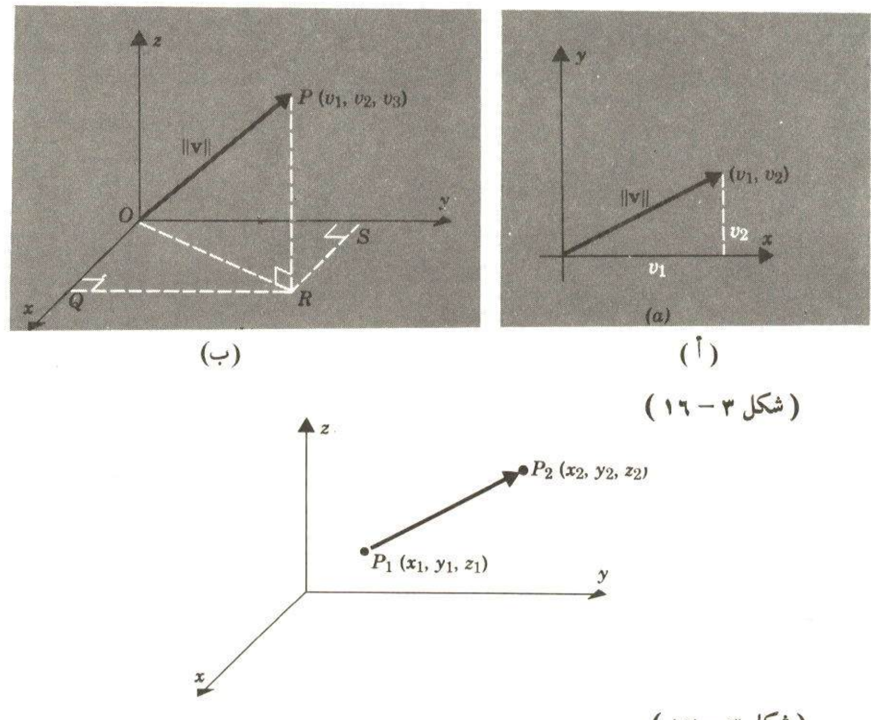
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{3.1}$$

إذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين فى الفضاء الثلاثى فإن المسافة d بينهما تكون مقياس المتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ (شكل ٣ - ١٧) . وحيث أن

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

فينتج من (3.1) أن

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



(ب) (أ)

(شكل ٣ - ١٦)

(شكل ٣ - ١٧)

بالمثل إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين فى الفضاء الثنائى فإن المسافة بينهما تعطى بالقاعدة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثـال (٤) :

مقياس المتجه $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ هو

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

المسافة d بين النقطتين $P_1(2, -1, -5)$ و $P_2(4, -3, 1)$ هى

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

تمارين ٣ ــ ٢

١ – احسب مقياس $\mathbf{v}$ إذا كان

(أ) $\mathbf{v} = (3, 4)$ (ب) $\mathbf{v} = (-1, 7)$ (جـ) $\mathbf{v} = (0, -3)$
(د) $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ (هـ) $\mathbf{v} = (-8, 7, 4)$ (و) $\mathbf{v} = (9, 0, 0)$

٢ – احسب المسافة بين P_1 و P_2

(أ) $P_1(2, 3), \quad P_2(4, 6)$ (ب) $P_1(-2, 7), \quad P_2(0, -3)$
(جـ) $P_1(8, -4, 2), \quad P_2(-6, -1, 0)$ (د) $P_1(1, 1, 1), \quad P_2(6, -7, 3)$

٣ – اعتبر أن $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$ ، $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ ، $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$. أوجد

(أ) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (ب) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (جـ) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$
(د) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (هـ) $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (و) $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

٤ – أوجد جميع الكميات القياسية k بحيث يكون $\|k\mathbf{v}\| = 3$ حيث $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$.

٥ – حقق الأجزاء (ب) ، (هـ) ، (و) ، (ز) من نظرية ١ إذا كان
$\mathbf{u} = (1, -3, 7)$ ، $\mathbf{v} = (6, 6, 9)$ ، $\mathbf{w} = (-8, 1, 2)$ ، $k = -3$ ، $l = 6$

٦ – أثبت أنه إذا كان $\mathbf{v}$ غير صفرى فإن مقياس $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ هو 1 .

٧ – استخدم تمرين ٦ لإيجاد متجه مقياسه 1 وله نفس اتجاه $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

٨ – اعتبر $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ و $\mathbf{p} = (x, y, z)$. صف فئة جميع النقط (x, y, z) التى تحقق $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.

٩ – أثبت هندسياً أنه إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين فى الفضاء الثنائى أو الثلاثى فإن $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

١٠ – أثبت الأجزاء (أ) ، (جـ) ، (هـ) من نظرية ١ تحليلياً .

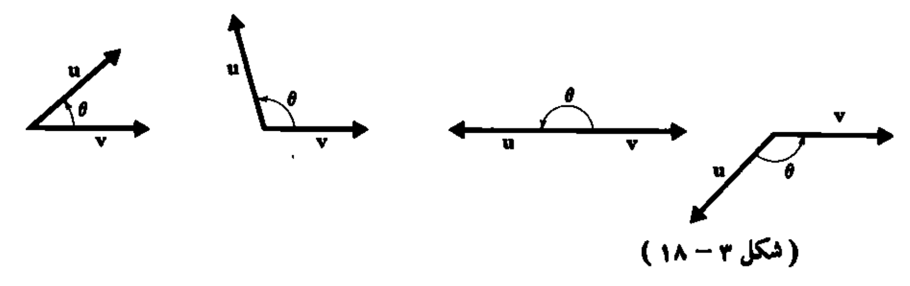
١١ – أثبت الأجزاء (د) ، (ز) ، (ح) من نظرية ١ تحليلياً .

١٢ – أثبت الجزء (و) من نظرية ١ هندسياً .

٣ ـ ٣ الضرب القياسى ـ المساقط

نقدم فى هذا القسم نوعاً من أنواع ضرب المتجهات فى الفضاء الثنائى والفضاء الثلاثى . ونبرهن الخواص الحسابية لهذا الضرب ونعطى بعض التطبيقات .

اعتبر أن **u** ، **v** متجهين غير صفريين فى الفضاء الثنائى أو الفضاء الثلاثى ، وافترض أن هذين المتجهين قد وضعا بحيث تنطبق نقطتا البداية لهما . نعنى بالزاوية بين **u** و **v** الزاوية θ المحددة من **u** و **v** والتى تحقق $0 \leq \theta \leq \pi$ (شكل ٣ – ١٨) .



(شكل ٣ – ١٨)

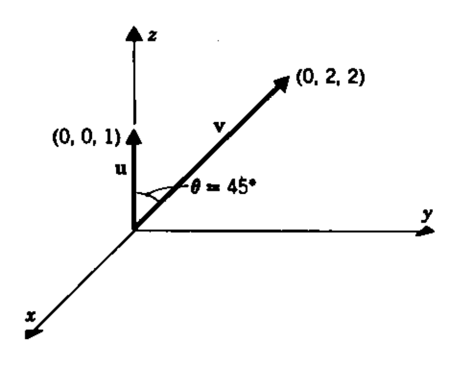
تعريف : إذا كان **u** ، **v** متجهين فى الفضاء الثنائى أو الفضاء الثلاثى وكانت θ هى الزاوية بين **u** و **v** فإن **الضرب القياسى** أو **الضرب الداخل الأقليدى** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ يعرف بواسطة

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta, & \text{إذا كان } \mathbf{u}\neq 0 \text{ و } \mathbf{v}\neq 0 \\ 0, & \mathbf{u}=0 \text{ أو } \mathbf{v}=0 \end{cases}$$

مثـــال (٥) :

كما هو مبين فى شكل ٣ – ١٩ ، الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ و $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$ تكون 45° . لذلك

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$



(شكل ٣ – ١٩)

أعتبر $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ أى متجهين غير صفريين . إذا كانت θ ، كما فى شكل ٣ – ٢٠ ، هى الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ فإن قانون جيب التمام يعطى

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \theta \tag{3.2}$$

حيث أن $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ فيمكن إعادة كتابة (3.2) كما يلى :

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

أى

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

بإجراء التعويضات الآتية :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

و

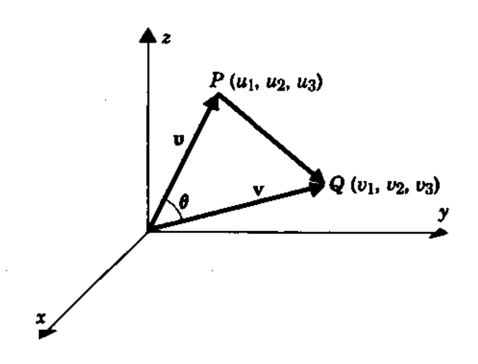
$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

نحصل بعد الاختصار على

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3.3}$$

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ متجهين فى الفضاء الثنائى ، فإن الصيغة المماثلة للصيغة (3.3) تكون

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$



مثـــال (٦) :

اعتبر المتجهين

$$\mathbf{u} = (2, -1, 1) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (1, 1, 2)$$

أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ وحدد الزاوية θ بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

الحــل :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

أيضا $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$ ، لذلك فإن

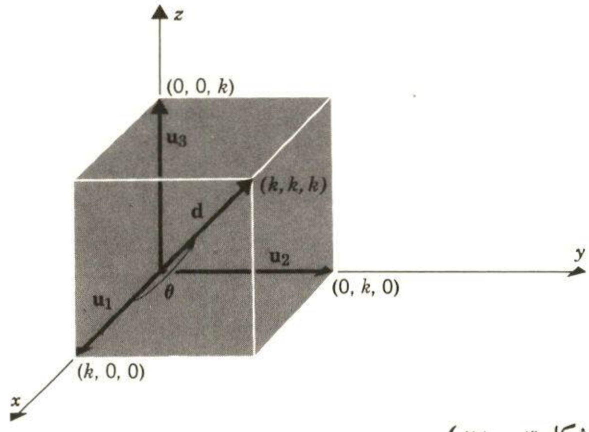
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

وإذن $\theta = 60^\circ$

مثــال (٧) :

أوجد الزاوية بين قطر المكعب وبين أى حرف من أحرف المكعب .

الحل : اعتبر أن k هو طول حرف المكعب ثم ادخل نظام إحداثيات كما هو مبين فى شكل ٣ – ٢١ .



(شكل ٣ – ٢١)

إذا اعتبرنا أن $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$ ، $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ ، $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$ فإن المتجه

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

يكون قطر المكعب . تحقق الزاوية θ بين $\mathbf{d}$ وبين الحرف $\mathbf{u}$ أن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وإذن

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54^\circ 44'.$$

تبين النظرية التالية كيف أن الضرب القياسى يمكن استخدامه للحصول على معلومات عن الزاوية بين متجهين وتعطى أيضاً علاقة هامة بين المقياس وبين الضرب المقياسى .

نظرية ٢ :

اعتبر أن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهان فى فضاء ثنائى أو فضاء ثلاثى .

(أ) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ أى أن $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$

(ب) إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين وكانت θ هى الزاوية بينهما فإن

θ حادة إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$.

θ منفرجة إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

$\theta = \pi/2$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

الإثبات :

(أ) حيث أن الزاوية θ بين $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{v}$ هى صفر فيكون

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{v}\|^2\cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2$$

(ب) حيث أن $\|\mathbf{u}\| > 0$ ، $\|\mathbf{v}\| > 0$ وأيضاً $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$

إذن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ له نفس الإشارة مثل $\cos\theta$. وحيث أن θ تحقق أن $0 \le \theta \le \pi$ فإن الزاوية θ تكون حادة إذا وفقط إذا كان $\cos\theta > 0$ ، وتكون θ منفرجة إذا وفقط إذا كان $\cos\theta < 0$ ، وتكون $\theta = \pi/2$ إذا وفقط إذا كان $\cos\theta = 0$.

مثـال (٨) :

إذا كان $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ، $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$ ، $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$ فإن

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

لذلك فإن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ تصنعان زاوية منفرجة ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ تصنعان زاوية حادة ويكون $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{w}$ متعامدين .

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب القياسى .

نظرية ٣ : إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ متجهات فى فضاء ثنائى أو فضاء ثلاثى وكان k عدداً قياسياً فإن

(أ) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(ب) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(جـ) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})$

(د) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} > 0$ *if* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *and* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ *if* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

الإثبات : سنثبت (جـ) للمتجهات فى الفضاء الثلاثى وتترك بقية الإثباتات كتمرينات .

اعتبر $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ، فيكون

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$
$$= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3$$
$$= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

بالمثل

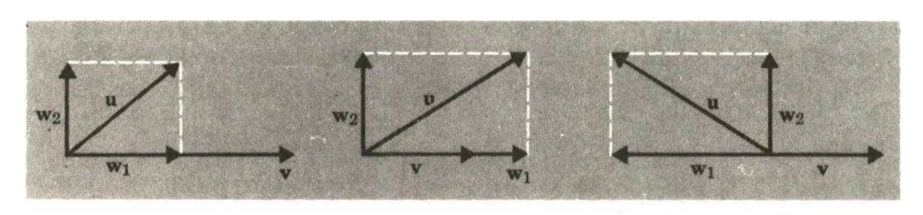
$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) \quad \blacksquare$$

اعتمادا على الجزء (ب) من نظرية ٢ ، فإننا نعرف أن المتجهين **u** ، **v** متعامدان (ويكتب $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$) إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. إذا اتفقنا أن المتجه الصفرى يصنع زاوية $\pi/2$ مع أى متجه ، فيكون أى متجهين متعامدين إذا وفقط إذا كانا هندسياً متعامدين .

ويستفاد من الضرب القياسى فى المسائل التى يكون فيها من المستحب تحليل المتجه إلى مجموع متجهين عموديين . إذا كان **u** ، **v** متجهين غير صفريين فى فضاء ثنائى أو ثلاثى ، فيمكن دائماً كتابة **u** على الصورة

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

حيث $\mathbf{w}_1$ مضاعف قياسى للمتجه **v** و $\mathbf{w}_2$ عمودى على **v** (شكل ٣ - ٢٢) . يسمى المتجه $\mathbf{w}_1$ **بالمسقط العمودى للمتجه u على v** ويسمى المتجه $\mathbf{w}_2$ **بمركبة u العمودية على v** .



(شكل ٣ - ٢٢)

يمكن الحصول على المتجهين $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ كما يلى . حيث أن $\mathbf{w}_1$ مضاعف قياسى للمتجه **v** فيمكن كتابته على الصورة $\mathbf{w}_1 = k\,\mathbf{v}$ وإذن

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \qquad (3.4)$$

بضرب كل من طرفى (3.4) فى **v** وباستخدام نظريتى ٢ و ٣ نحصل على

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (k\mathbf{v} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} = k\|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}$$

وحيث أن $\mathbf{w}_2$ عمودى على **v** ، فيكون $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$ وإذن هذه المعادلة تعطى

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

وحيث أن $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{v}$ فنحصل على

المسقط العمودى للمتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$

وبحل $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ بالنسبة إلى $\mathbf{w}_2$ نحصل على

مركبة $\mathbf{u}$ العمودية على $\mathbf{v}$ هى $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$

مثال (٩) :

اعتبر المتجهين

$$\mathbf{u} = (2, -1, 3) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (4, -1, 2)$$

حيث أن

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

وأيضاً

$$\|\mathbf{v}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

فيكون المسقط العمودى للمتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

ومركبة المتجه $\mathbf{u}$ العمودية على $\mathbf{v}$ هى

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

وللتأكد قد يرغب القارىء أن يتحقق من أن $\mathbf{w}_2$ عمودى على $\mathbf{v}$ بإثبات إن $\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v} = 0$.

تمارين ٣ — ٣

١ — أوجد $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ لكل من

(أ) $\mathbf{u} = (1, 2), \mathbf{v} = (6, -8)$ (ب) $\mathbf{u} = (-7, -3), \mathbf{v} = (0, 1)$

(جـ) $\mathbf{u} = (1, -3, 7), \mathbf{v} = (8, -2, -2)$ (د) $\mathbf{u} = (-3, 1, 2), \mathbf{v} = (4, 2, -5)$

٢ — فى كل جزء من تمرين (١) ، أوجد جيب تمام الزاوية θ بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$.

٣ — حدد ما إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يصنعان زاوية حادة أو زاوية منفرجة أو متعامدين

(أ) $\mathbf{u} = (7, 3, 5), \mathbf{v} = (-8, 4, 2)$ (ب) $\mathbf{u} = (6, 1, 3), \mathbf{v} = (4, 0, -6)$

(جـ) $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \mathbf{v} = (-1, 0, 0)$ (د) $\mathbf{u} = (4, 1, 6), \mathbf{v} = (-3, 0, 2)$

٤ – أوجد المسقط العمودى للمتجه u على v إذا كان

(أ) $\mathbf{u} = (2, 1), \mathbf{v} = (-3, 2)$ (ب) $\mathbf{u} = (2, 6), \mathbf{v} = (-9, 3)$

(جـ) $\mathbf{v} = (-7, 1, 3), \mathbf{v} = (5, 0, 1)$ (د) $\mathbf{u} = (0, 0, 1), \mathbf{v} = (8, 3, 4)$

٥ – فى كل جزء من تمرين (٤) أوجد مركبة u العمودية على v .

٦ – حقق نظرية ٣ عندما $\mathbf{u} = (6, -1, 2)$ ، $\mathbf{v} = (2, 7, 4)$ ، $k = -5$.

٧ – أوجد متجهين مقياسهما هو 1 بحيث يكونان عموديين على $(3, -2)$.

٨ – اعتبر أن $\mathbf{u} = (1, 2)$ ، $\mathbf{v} = (4, -2)$ ، $\mathbf{w} = (6, 0)$. أوجد

(أ) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (ب) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{w}\|$ (جـ) $\|\mathbf{u}\|\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (د) $(\|\mathbf{u}\|\, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

٩ – فسر لماذا تعتبر كل من الصيغ التالية غير ذات معنى .

(أ) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (ب) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (جـ) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (د) $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

١٠ – استخدم المتجهات لإيجاد جيوب تمام الزوايا الداخلية للمثلث الذى رؤوسه $(-1, 0)$ ، $(-2, 1)$ ، $(1, 4)$

١١ – أثبت المتطابقة

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

١٢ – أثبت المتطابقة

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

١٣ – أوجد الزاوية بين قطر المكعب ووجه المكعب .

١٤ – جيوب التمام الاتجاهية للمتجه v فى الفضاء الثلاثى هى الاعداد $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ حيث α ، β ، γ هى الزوايا بين v وبين محاور x ، y ، z الموجبة . أثبت أنه إذا كان $\mathbf{v} = (a, b, c)$ فإن $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ أوجد $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$.

١٥ – أثبت أنه إذا كان v عمودياً على $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ فإن v عمودى على $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$ لأى أعداد قياسية k_1 ، k_2 .

١٦ – اعتبر أن u ، v أى متجهين غير صفريين فى الفضاء الثنائى أو الثلاثى . إذا كان $k = \|\mathbf{u}\|$ ، $l = \|\mathbf{v}\|$ ، فأثبت أن المتجه

$$\mathbf{w} = \frac{1}{k + l}(k\mathbf{v} + l\mathbf{u})$$

ينصف الزاوية بين u ، v .

٣ ــ ٤ الضرب الاتجاهى

فى كثير من تطبيقات المتجهات فى مسائل الهندسة والطبيعة والعلوم الهندسية يكون من المفيد تكوين متجه فى الفضاء الثلاثى بحيث يكون عمودياً على متجهين معطيين . نقدم فى هذا القسم نوعاً من أنواع ضرب المتجهات ييسر هذا التكوين .

تعريف : إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ متجهين فى الفضاء الثلاثى فإن **الضرب الاتجاهى** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يكون هو المتجه المعرف بواسطة

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

أو بصورة المحددات

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{3.5}$$

ملحوظة : يوجد رسم للصيغة 3.5 يكون مفيداً للتذكرة . إذا كونا المصفوفة من النوع 2×3

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

بحيث تكون مكونات الصف الأول هى مركبات العامل الأول $\mathbf{u}$ ومكونات الصف الثانى هى مركبات العامل الثانى $\mathbf{v}$ فيمكن الحصول على المركبة الأولى من $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ بحذف العمود الأول من المصفوفة ، ومحدد المركبة الثانية بحذف العمود الثانى من المصفوفة ، ومحدد المركبة الثالثة بحذف العمود الثالث من المصفوفة .

مثـــال (١٠) :

أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ حيث $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ ، $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

الحـــل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (2, -7, -6)$$

بينما يكون الضرب القياسى لمتجهين هو عدد قياسى فإن الضرب الاتجاهى يكون متجهاً آخر . تعطى النظرية التالية علاقة هامة بين الضرب القياسى والضرب الاتجاهى وتبين أيضاً أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يكون عمودياً على كل من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$.

نظرية ٤ : إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين فى الفضاء الثلاثى فإن

(أ) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ [$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودى على $\mathbf{u}$]

(ب) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ [$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودى على $\mathbf{v}$]

(جـ) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ [متطابقة لاجرانج]

البرهــان : اعتبر أن $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ، $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$.

(أ)
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=(u_1,u_2,u_3)\cdot(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)\\&=u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(u_3v_1-u_1v_3)+u_3(u_1v_2-u_2v_1)\\&=0\end{aligned}$$

(ب) بالمثل كما فى (أ)

(جـ) حيث أن

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2 \quad (3.6)$$

وأيضاً

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\\&=({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)({v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\end{aligned} \quad (3.7)$$

يمكن إثبات متطابقة لاجرانج بإجراء عمليات الضرب فى الطرف الأيمن . بكل من (3.6) ، (3.7) والتحقق من تساوى الناتجين .

مثــال (١١) :

اعتبر المتجهين

$$\mathbf{v}=(3,0,1) \quad و \quad \mathbf{u}=(1,2,-2)$$

بينا فى مثــال (١٠) أن :

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(2,-7,-6)$$

حيث أن

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(1)(2)+(2)(-7)+(-2)(-6)=0$$

وأيضاً

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(3)(2)+(0)(-7)+(1)(-6)=0$$

فيكون $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودياً على كل من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ كما هو مكفول بنظرية ٤ .

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب الاتجاهى .

نظرية ٥ : إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ أى ثلاثة متجهات فى الفضاء الثلاثى و k أى عدد قياسى فإن

(أ) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(ب) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(جـ) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(د) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(هـ) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(و) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

تنتج البراهين مباشرة من الصيغة (3.5) ومن خواص المحددات ، فمثلا ، (أ) يمكن أن تثبت كما يلى :

الإثبــات : (أ) بتبادل $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ فى (3.5) يتبادل الصفان فى كل من المحددات الثلاثة الموجودة بالطرف الايمن من (3.5) ، ومن ثم تتغير إشارة كل مركبة من الضرب الاتجاهى ، وعليه فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

تترك براهين بقية الأجزاء كتمارين .

مثــال (١٢) :

اعتبر المتجهــات

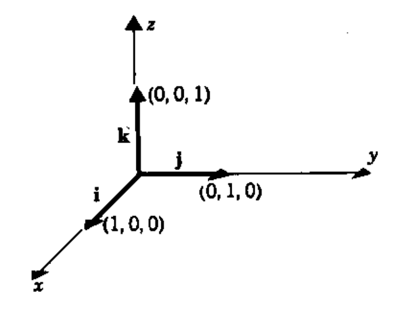
$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

كل من هذه المتجهات طوله 1 وهى تقع على محاور الأحداثيات (شكل ٣ – ٢٣) وتسمى هذه المتجهات **بمتجهات الوحدة القياسية** فى الفضاء الثلاثى . ويمكن التعبير عن كل متجه $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ فى الفضاء الثلاثى بدلالة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ حيث أنه يمكننا أن نكتب

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

فـــثلا

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$



(شكل ٣ – ٢٣)

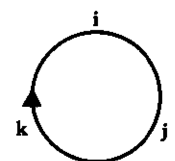
من (3.5) نحصل على

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

ومن السهل على القارىء الحصول على النتائج التالية :

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

يساعد الرسم التالى فى تذكر هذه النتائج



بالرجوع إلى هذا الرسم فإن حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين متتاليين فى اتجاه عقارب الساعة يكون هو المتجه التالى فى الدائرة ، ويكون حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين متتاليين فى اتجاه عكس عقارب الساعة هو المتجه التالى فى الدائرة بإشارة سالبة .

وجدير بالذكر أن الضرب الاتجاهى يمكن أن يمثل رمزياً على صورة المحدد من النوع 3×3

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

فمثلا إذا كان $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ ، $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ فإن

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

وهو مايتفق مع النتيجة التى حصلنا عليها فى مثال ١٠ .

تحـــذير : بوجه عام ليس من الصحيح أن $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ فمثـــلا

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

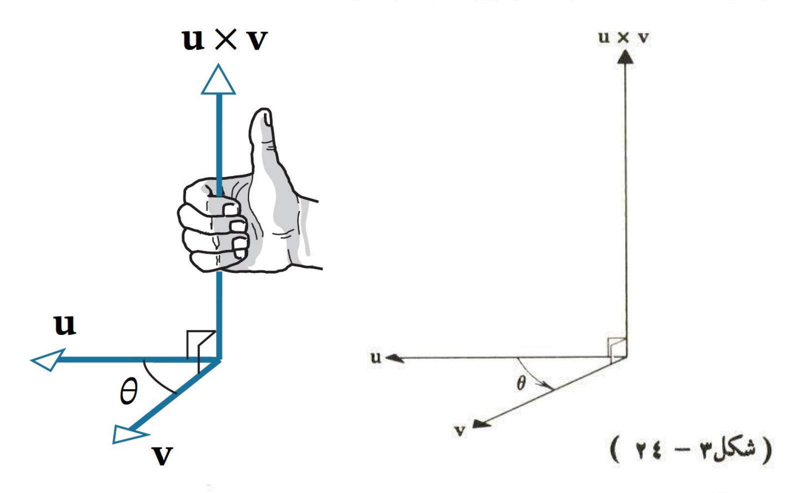
وأيضاً

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{i}$$

وإذن

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$

نعلم من نظرية ٤ أن $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ عمودى على كل من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$. إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين فيمكن إثبات أن اتجاه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ يمكن تحديده باستخدام قاعدة اليد اليمنى التالية* (شكل ٣ — ٢٤) . اعتبر θ هى الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ وافترض أن $\mathbf{u}$ قد دار زاوية مقدارها θ حتى انطبق على $\mathbf{v}$. إذا ضمت أصابع اليد اليمنى بحيث تشير إلى اتجاه الدوران فإن الأبهام يحدد (تقريباً) اتجاه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$



(شكل ٣ — ٢٤)

قد يجد القارىء أنه من المفيد اختبار هذه القاعدة بحواصل الضرب

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

التى نوقشت فى مثال ١٢ .

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين فى الفضاء الثلاثى فإن مقياس $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ له تفسير هندسى مفيد . تنص متطابقة لاجرانج المعطاة فى نظرية (٤) على أن

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \tag{3.8}$$

إذا كانت θ ترمز إلى الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ فإن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ وإذن يمكن إعادة كتابة (3.8) على الصورة

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2&=\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta\\&=\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta)\\&=\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

ومنها

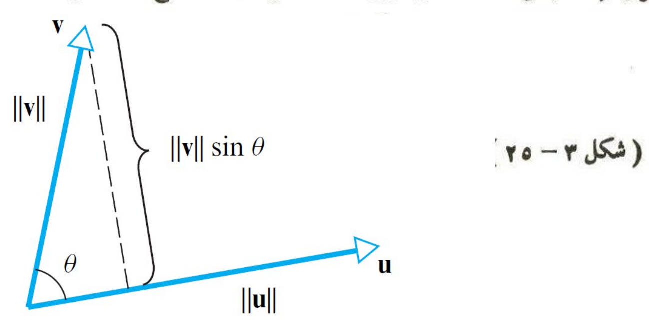
$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\theta \tag{3.9}$$

(*) تذكر أننا اتفقنا على اعتبار انظمة احداثياتاليد اليمنى فى هذا المرجع . لو كنا استخدمنا أنظمة اليد اليسرى بدلا منها لوجب استخدام قاعـدة اليد اليسرى هنا .

ولكن $\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ هو ارتفاع متوازى الأضلاع المحدد من u ، v (شكل ٣ – ٢٥) . من (3.9) تعطى المساحة A لمتوازى الأضلاع هذا بالقاعدة

$$A = (\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

وبعبارة أخرى فإن مقياس $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوى مساحة متوازى الأضلاع المحدد من u ، v .



(شكل ٣ – ٢٥)

مثـــال (١٣) :

أوجد مساحة المثلث المحدد بالنقط $P_1\,(2, 2, 0)$ ، $P_2(-1, 0, 2)$ و $P_3\,(0, 4, 3)$.

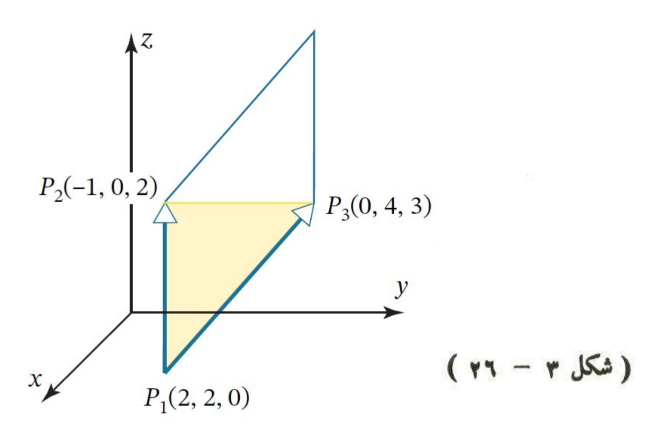
الحـــل : مساحة المثلث A هى نصف مساحة متوازى الأضلاع المحدد بالمتجهين $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ (شكل ٣ – ٢٦) .

باستخدام الطريقة التى نوقشت فى مثال (٢) من القسم (٣ – ١) يكون $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$ ، $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$ ، وينتج أن

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

وبالتالى فإن

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2}$$



(شكل ٣ – ٢٦)

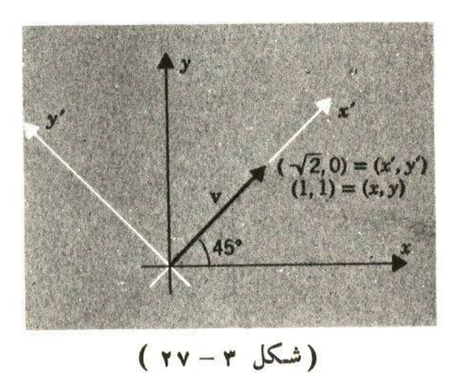
فى البداية قد عرفنا المتجه بأنه جزء من خط مستقيم أو سهم له اتجاه فى فضاء ثنائى أو فضاء ثلاثى ، ثم أدخلنا بعد ذلك أنظمة الإحداثيات والمركبات لتبسيط العمليات الحسابية للمتجهات . لذلك فللمتجه « وجود رياضى » بغض النظر عن إدخال نظام إحداثيات . بالإضافة إلى ذلك فإن مركبات متجه لا تحدد من المتجه بمفرده ، ولكنها تعتمد أيضاً على نظام الإحداثيات المختار . فمثلا فى شكل ٣ - ٢٧ قد أشرنا إلى متجه ثابت **v** فى المستوى وإلى نظامى إحداثيات مختلفين . مركبتا المتجه **v** فى نظام الأحداثيات xy هما $(1, 1)$ وفى النظام $x'y'$ هما $(\sqrt{2}, 0)$.

وهذا يثير سؤالا هاما حول تعريفنا للضرب الاتجاهى . حيث أننا قد عرفنا الضرب الاتجاهى $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ بدلالة مركبات **u** ، **v** وحيث أن هذه المركبات تعتمد على نظام الإحداثيات المختار فقد يخيل لنا أنه من الممكن أن يكون لمتجهين ثابتين **u** ، **v** حواصل ضرب اتجاهى مختلفة فى أنظمة الإحداثيات المختلفة . لحسن الحظ أن هذا لا يحدث . لإثبات ذلك نحتاج فقط إلى تذكر أن :

(١) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمود على كل من **u** ، **v** ،

(٢) يحدد اتجاه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ باستخدام قاعدة اليد اليمنى

(٣) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$



(شكل ٣ - ٢٧)

تحدد تماما هذه الخواص الثلاثة المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ، تحدد الخاصيتان (١) ، (٢) الاتجاه وتحدد الخاصية (٣) الطول . حيث أن هذه الخواص تعتمد فقط على الطول والموقع النسبى للمتجهين **u** ، **v** ولا تعتمد على نظام إحداثيات اليد اليمنى الخاص الذى يستخدم فان المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ سيبقى بدون تغيير إذا أدخلنا نظام إحداثيات يد يمنى مختلف . توصف هذه الحقيقة بالنص على أن تعريف $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **لا يعتمد على الإحداثيات** . وتعتبر هذه النتيجة مهمة للفيزيائيين والمهندسين الذين يتعاملون عادة مع الكثير من أنظمة الاحداثيات فى المسألة الواحدة .

مثال (١٤) :

اعتبر متجهين متعامدين u ، v طول كل منهما 1 (كما هو مبين فى شكل ٣ – ٢٨ أ) . إذا أدخلنا نظام إحداثيات xyz كما هو مبين فى شكل ٣ – ٢٨ ب فإن

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad و \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

وإذن :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

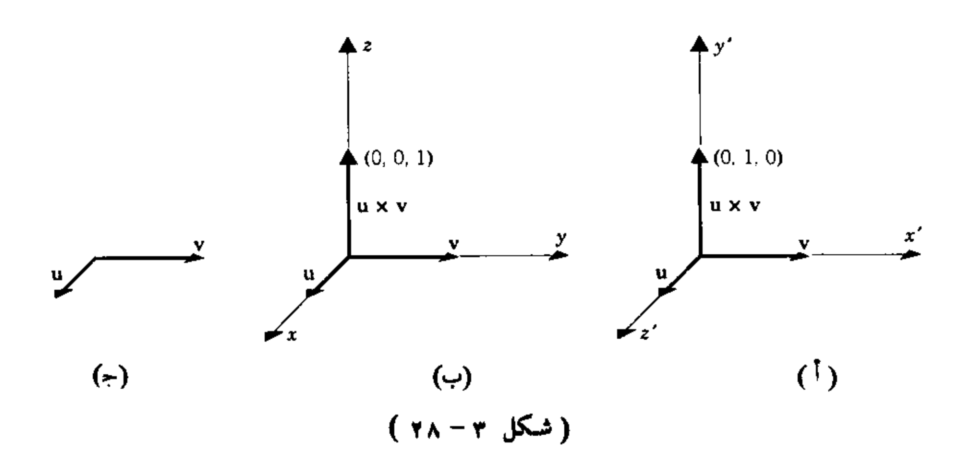
ومن جهة أخرى إذا أدخلنا نظام إحداثيات $x'y'z'$ كما هو مبين فى شكل ٣ – ٢٨ جـ فإن

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \quad و \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

وإذن

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

ولكن واضح من الشكلين ٣ – ٢٨ ب ، جـ أن المتجه (0, ,0, 1) فى النظام xyz هو نفسه المتجه $(0, 1, 0)$ فى النظام $x'y'z'$. إذن نحصل على نفس المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ إذا حسبنا باحداثيات النظام xyz أو باحداثيات النظام $x'y'z'$.



(شكل ٣ – ٢٨)

تمارين ٣ — ٤

١ – اعتبر $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{v} = (0, 1, 7)$ ، $\mathbf{w} = (1, 4, 5)$ احسب

(أ) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (ب) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (جـ) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

(د) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (هـ) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (و) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

٢ – أوجد فى كل جزء متجها عموديا على كل من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$

(أ) $\mathbf{u} = (-7, 3, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 0, 4)$
(ب) $\mathbf{u} = (-1, -1, -1) \quad \mathbf{v} = (2, 0, 2)$

٣ – أوجد فى كل جزء مساحة المثلث الذى رؤوسه $R, Q, P,$

(أ) $P(1, 5, -2) \quad Q(0, 0, 0) \quad R(3, 5, 1)$
(ب) $P(2, 0, -3) \quad Q(1, 4, 5) \quad R(7, 2, 9)$

٤ – حقق نظرية ٤ للمتجهين $\mathbf{u} = (1, -5, 6)$ و $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$.

٥ – حقق نظرية ٥ عندما $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$ ، $\mathbf{v} = (6, 7, 4)$ ، $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ ، $k = -3$.

٦ – ما هو الخطأ فى التعبير $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ؟

٧ – اعتبر $\mathbf{u} = (-1, 3, 2)$ ، $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$. أوجد جميع المتجهات $\mathbf{x}$ التى تحقق $\mathbf{u} \times \mathbf{x} = \mathbf{w}$.

٨ – اعتبر $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2\ \ w_3)$ أثبت أن

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

٩ – استخدم نتيجة تمرين ٨ لحساب $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ عندما $\mathbf{u} = (-1, 4, 7)$ ، $\mathbf{v} = (6, -7, 3)$ ، $\mathbf{w} = (4, 0, 1)$.

١٠– اعتبر $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ متجهين بحيث تكون مركباتهما فى النظام xyz لشكل ٣ – ٢٨ هى $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$ ، $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$

(أ) أوجد مركبات $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ فى النظام $x'y'z'$ لشكل ٣ – ٢٨ .

(ب) احسب $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ باستخدام المركبات فى النظام xyz .

(جـ) احسب $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ باستخدام المركبات فى النظام $x'y'z'$.

(د) أثبت أن المتجهين الذين حصلنا عليهما فى (ب) ، (جـ) هما نفس المتجه .

١١– أثبت المتطابقتين الاتيتين :

(أ) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
(ب) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$

١٢ – اعتبر u ، v ، w متجهات غير صفرية فى الفضاء الثلاثى بحيث - يرتبط أى إثنين منهما خطيا . أثبت أن :

(أ) يقع $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ فى المستوى المحدد من v ، w (بفرض أن المتجهات قد وضعت بحيث يكون لها نفس نقطة البداية) .

(ب) يقع $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ فى المستوى المحدد من u ، v .

١٣ – أثبت أن $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$.

[إرشاد : أثبت أولا النتيجة عندما $\mathbf{z} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ثم عندما $\mathbf{z} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ وبعد ذلك عندما $\mathbf{z} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ أخيرا أثبت النتيجة لأى متجه إختيارى $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ بكتابة $\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$] .

١٤ – أثبت الجزئين (أ) ، (ب) من نظرية ٥ .

١٥ – أثبت الجزئين (ج) ، (د) من نظرية ٥ .

١٦ – أثبت الجزئين (هـ) ، (و) من نظرية ٥ .

٣ – ٥ المستقيمات والمستويات فى الفضاء الثلاثى

فى هذا القسم سوف نستخدم المتجهات لاشتقاق معادلات المستقيمات والمستويات فى الفضاء الثلاثى . وسوف نستخدم أيضاً هذه المعادلات لحل بعض المسائل الأساسية فى الهندسة .

فى الهندسة التحليلية المستوية يمكن تحديد المستقيم باعطاء ميله وإحدى نقطه . بالمثل يمكن تحديد المستوى فى الفضاء الثلاثى باعطاء اتجاهه وإحدى نقطه . ومن الطرق الملائمة لوصف الاتجاه هى أن نحدد متجها (يسمى **العمودى**) وهو الذى يكون عموديا على المستوى .

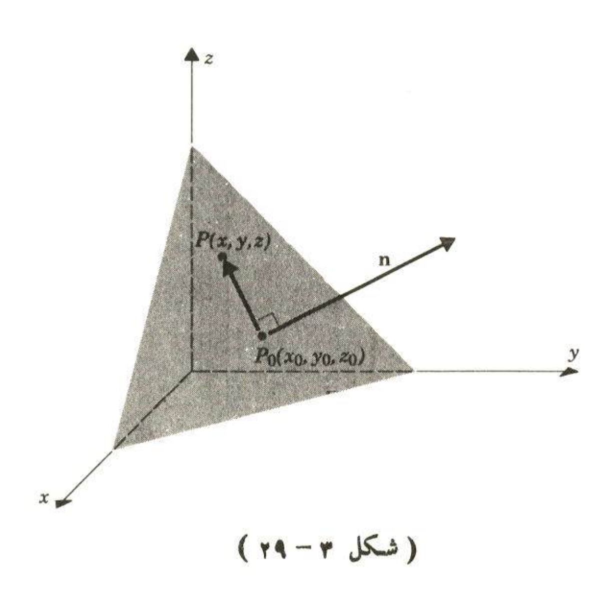
نفرض أننا نريد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $\mathbf{p}_0(x_0, y_0, z_0)$ ويكون العمودى له هو المتجه غير الصفرى $\mathbf{n} = (a, b, c)$. واضح من شكل ٣ – ٢٩ أن المستوى يتكون بالتحديد من تلك النقط $P(x, y, z)$ التى يكون لها المتجه $\overrightarrow{P_0P}$ عموديا على n أى التى تحقق

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (3.10)$$

حيث أن $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ فان (3.9) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (3.11)$$

سنسمى هذه الصورة بصورة **النقطة والعمودى** لمعادلة المستوى .



(شكل ٣ - ٢٩)

مثال (١٥) :

أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (3, − 1, 7) ويكون عموديا على المتجه $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$

الحل : من (3.11) صورة النقطة والعمودى هى

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

باجراء عمليات الضرب وتجميع الحدود يمكن إعادة كتابة (3.11) على الصورة

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (3.12)$$

حيث a ، b ، c ، d ثوابت وأيضاً a ، b ، c ليست كلها أصفارا . للتوضيح فإن المعادلة الموجودة فى مثال ١٥ يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

كما تبين لنا النظرية التالية فإن كل معادلة على الصورة (3.12) تمثل مستويا فى الفضاء الثلاثى .

نظرية ٦ : إذا كانت a ، b ، c ، d ثوابت وأيضاً a ، b ، c ليست كلها أصفارا فإن الشكل البيانى للمعادلة :

$$ax + by + cz + d = 0$$

هو مستوى يكون المتجه $\mathbf{n} = (a, b, c)$ عموديا له.

البرهان : من الفرض a ، b ، c ليست كلها أصفارا . نفرض ، فى هذه اللحظة ، أن $a \neq 0$ يمكن إعادة كتابة المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ على الصورة $a(x + d/a) + by + cz = 0$. ولكن هذه هى صورة النقطة والعمودى لمعادلة مستوى يمر با لنقطة $(-d/a, 0, 0)$ وله المتجه $\mathbf{n} = (a, b\ c)$ عموديا عليه .

إذا كانت $a = 0$ فإنه إما $b \neq 0$ أو $c \neq 0$ ويمكن بتعديل مباشر للبرهان السابق معالجة هذه الحالات الأخرى .

المعادلة (3.12) هى معادلة خطية فى x ، y ، z وتسمى **الصورة العامة** لمعاد المستوى .
كما أن حلول نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

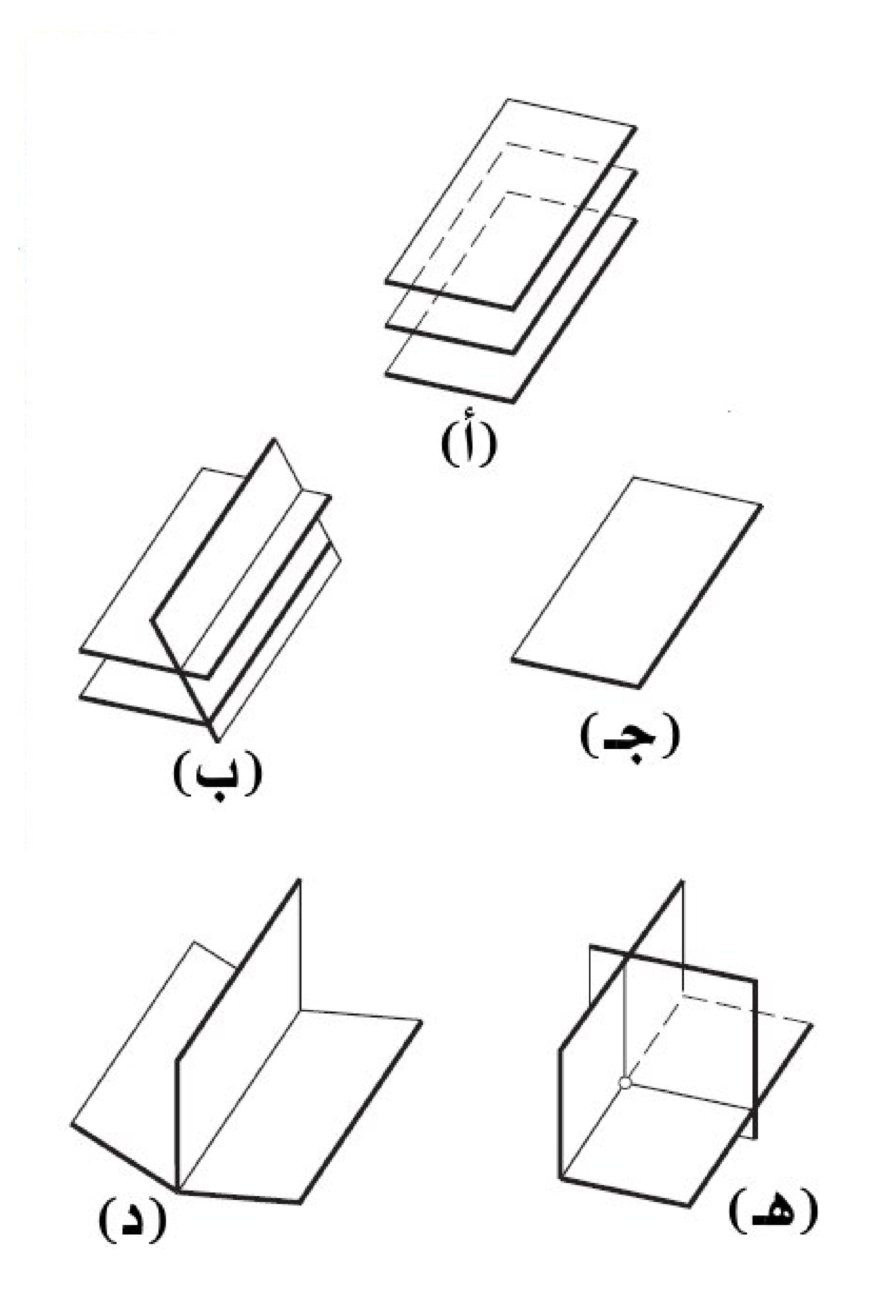
تناظر نقط تقاطع الخطين المستقيمين $ax + by = k_1$ و $cx + dy = k_2$ فى المستوى xy ، فان حلول النظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \tag{3.13}$$

تناظر نقط تقاطع المستويات

$$ax + by + cz = k_1, \quad dx + ey + fz = k_2, \quad gx + hy + iz = k_3 .$$

فى شكل ٣ — ٣٠ قد أوضحنا بعض الاحتمالات الهندسية عندما يكون النظام (3.13) له صفر من الحلول أو حل واحد أو عدد لا نهائى من الحلول .



(شكل ٣-٣٠) : (أ) لا توجد حلول (ثلاثة مستويات متوازية) .
(ب) لا توجد حلول (مستويان متوازيان) .
(جـ) عدد لا نهائى من الحلول (ثلاثة مستويات منطبقة) .
(د) عدد لا نهائى من الحلول (ثلاثة مستويات متقاطعة فى خط مستقيم) .
(هـ) حل واحد (ثلاثة مستويات متقاطعة فى نقطة)

مثال (١٦) :

أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقط $P_1(1, 2, -1)$ ، $P_2(2, 3, 1)$ ، $P_3(3, -1, 2)$

الحل : بما أن النقط الثلاث تقع فى المستوى فإن إحداثياتها يجب أن تحقق المعادلة العامة للمستوى . لهذا

$$a + 2b - c + d = 0$$
$$2a + 3b + c + d = 0$$
$$3a - b + 2c + d = 0$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$a = -\tfrac{9}{16}t \qquad b = -\tfrac{1}{16}t \qquad c = \tfrac{5}{16}t \qquad d = t$$

بأخذ $t = -16$ مثلا نحصل على المعادلة المطلوبة

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

نلاحظ أن أى اختيار آخر لقيمة t يعطى مضاعفا لهذه المعادلة . لذلك فإن أى قيمة $t \neq 0$ تعطى المعادلة المطلوبة .

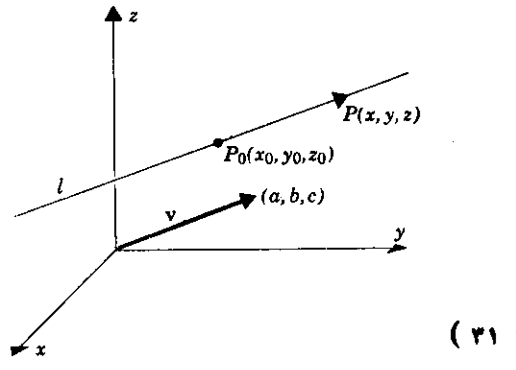
حل آخر : حيث أن $P_1(1, 2, -1)$ ، $P_2(2, 3, 1)$ ، $P_3(3, -1, 2)$ تقع فى المستوى فإن المتجهين $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ و $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$ يوازيان المستوى لهذا فإن $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ يكون عموديا على المستوى حيث أنه عمودى على كل من $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، $\overrightarrow{P_1P_3}$ من هذا ومن حقيقة أن P_1 تقع فى المستوى فان صورة النقطة والعمودى لمعادلة المستوى تكون

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

أى :

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

سنبين الآن كيفية الحصول على معادلات المستقيمات فى الفراغ الثلاثى . نفرض أن l مستقيم فى الفراغ الثلاثى يمر بالنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ويوازى المتجه غير الصفرى $\mathbf{v} = (a, b, c)$ من الواضح (شكل ٣ - ٣١) أن l تتكون بالذات من تلك النقط $P(x, y, z)$ التى يكون لها المتجه $\overrightarrow{P_0P}$



(شكل ٣ - ٣١)

يوازى $\mathbf{v}$ أى التى يوجد لها عدد قياسى t بحيث يكون

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \tag{3.14}$$

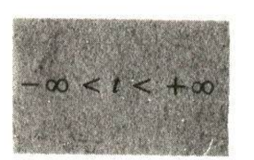
يمكن كتابة **(3.14)** بدلالة المركبات كالآتى :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

ومن هذا ينتج أن

$$x = x_0 + ta$$
$$y = y_0 + tb$$
$$z = z_0 + tc$$

حيث



تسمى هذه المعادلات **بالمعادلات البارامترية** للمستقيم l حيث أن المستقيم l يرسم بالنقطة $P(x, y, z)$ إذا تغير البارامتر (الدليل) t من $-\infty$ إلى $+\infty$.

مثـال (١٧) :

يكون للمستقيم المار بالنقطة $(1, 2, -3)$ والموازى للمتجه $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$ المعادلات البارامترية

$$x = 1 + 4t$$
$$y = 2 + 5t \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = -3 - 7t$$

مثـال (١٨) :

(أ) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم l المار بالنقطتين $P_1(2, 4, -1)$ ، $P_2(5, 0, 7)$.

(ب) أين يقطع المستقيم المستوى xy ؟

الحل : (أ) حيث أن المتجه $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$ مواز للمستقيم l وأن $P_1(2, 4, -1)$ تقع على l ، فان المستقيم l يعطى بالمعادلات

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 4 - 4t \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = -1 + 8t$$

(ب) يقطع المستقيم المستوى xy فى النقطة $z = -1 + 8t = 0$

أى عندما $t = 1/8$ بالتعويض بهذه القيمة عن t فى المعادلات البارامترية للمستقيم l نجد أن نقطة التقاطع هى :

$$(x, y, z) = (\tfrac{19}{8}, \tfrac{7}{2}, 0)$$

مثال (١٩) :

أوجد المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0 \quad \text{و} \quad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

الحل : يتكون خط التقاطع من جميع النقط $(x, y z)$ التى تحقق المعادلتين فى النظام

$$3x + 2y - 4z = 6$$
$$x - 3y - 2z = 4$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t \qquad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t \qquad z = t$$

وتكون المعادلات البارامترية للمستقيم l تبعا لذلك هى

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t \\ y &= -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t \\ z &= t \end{aligned} \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < t < +\infty$$

فى بعض المسائل يعطى خطا مستقيما

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < t < +\infty \tag{3.15}$$

ويكون من المفيد إيجاد مستويين يتقاطعان فى المستقيم المعطى . حيث أنه يوجد عدد لا نهائى من المستويات المارة بالمستقيم لذلك يوجد دائما عدد لا نهائى من هذه الأزواج من المستويات . لإيجاد مستويين من تلك المستويات عندما تكون الثوابت a ، b ، c جميعها مختلفة عن الصفر ، يمكننا إعادة كتابة كل معادلة من (3.15) على الصورة

$$\frac{x - x_0}{a} = t \qquad \frac{y - y_0}{b} = t \qquad \frac{z - z_0}{c} = t$$

حذف البارامتر t يبين أن المستقيم يتكون من جميع النقط (x, y, z) التى تحقق المعادلات

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

والتى تسمى بالمعادلات المتماثلة للمستقيم . لذلك يمكن اعتبار المستقيم كتقاطع المستويين

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \text{و} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

أو كتقاطع المستويين

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{و} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

وهكذا .

مثال (٢٠) :

أوجد مستويين بحيث يكون خط تقاطعهما هو المستقيم

$$x = 3 + 2t$$
$$y = -4 + 7t \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = 1 + 3t$$

الحل : حيث أن المعادلات المتماثلة لهذا الخط المستقيم هى

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3} \tag{3.16}$$

فيكون المستقيم هو تقاطع المستويين

$$\frac{y + 4}{7} = \frac{z - 1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 4}{7}$$

أو بصيغة مكافئة

$$7x - 2y - 29 = 0 \quad \text{و} \quad 3y - 7z + 19 = 0$$

ويمكن الحصول على حلول أخرى باختيار أزواج معادلات أخرى من (3.16) .

تمارين ٣ — ٥

١ – أوجد فى كل جزء صورة النقطة والعمودى لمعادلة المستوى المار بالنقطة P والذى له المتجه $\mathbf{n}$ كعمودى .

(أ) $P(2, 6, 1); \mathbf{n} = (1, 4, 2)$ (ب) $P(-1, -1, 2); \mathbf{n} = (-1, 7, 6)$

(جـ) $P(1, 0, 0); \mathbf{n} = (0, 0, 1)$ (د) $P(0, 0, 0); \mathbf{n} = (2, 3, 4)$

٢ – اكتب معادلات المستويات فى تمرين ١ فى الصورة العامة .

٣ – أوجد صورة النقطة والعمودى لكل من :

(أ) $2x - 3y + 7z - 10 = 0$ (ب) $x + 3z = 0$

٤ – أوجد فى كل جزء معادلة المستوى الذى يمر بالنقط المعطاة

(أ) $(1, 0, -1)$ $(0, 2, 3)$ $(-2, 1, 1)$
(ب) $(-1, 3, 2)$ $(2, 1, -1)$ $(3, 2, 1)$

٥ – أوجد فى كل جزء المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة P ويوازى $\mathbf{n}$.

(أ) $P(2, 4, 6); \mathbf{n} = (1, 2, 5)$ (ب) $P(-3, 2, -4); \mathbf{n} = (5, -7, -3)$
(جـ) $P(1, 1, 5); \mathbf{n} = (0, 0, 1)$ (د) $P(0, 0, 0); \mathbf{n} = (1, 1, 1)$

٦ – أوجد المعادلات المتماثلة للمستقيمين فى (أ) ، (ب) بتمرين ٥ .

٧ – أوجد فى كل جزء المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقط المعطاة .

(أ) $(6, -1, 5), (7, 2, -4)$ (ب) $(0, 0, 0), (-1, -1, -1)$

٨ – أوجد فى كل جزء المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين المعطيين .

(أ) $-2x + 3y + 7z + 2 = 0$ و $x + 2y - 3z + 5 = 0$
(ب) $3x - 5y + 2z = 0$ و $z = 0$

٩ – أوجد فى كل جزء معادلتى مستويين بحيث يكون خط تقاطعهما هو المستقيم المعطى .

(أ) $x = 3 + 4t$, $y = -7 + 2t$, $z = 6 - t$ $\quad -\infty < t < +\infty$
(ب) $x = 5t$, $y = 3t$, $z = 6t$ $\quad -\infty < t < +\infty$

١٠ – أوجد معادلات كل من المستوى xy والمستوى xz والمستوى yz .

١١ – أثبت أن المستقيم

$$x = 0$$
$$y = t \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = t$$

(أ) يقع فى المستوى $6x + 4y - 4z = 0$.
(ب) يوازى ويقع أسفل المستوى $5x - 4y + 3z = 1$.
(جـ) يوازى ويقع أعلى المستوى $6x + 2y - 2z = 3$.

١٢ – أوجد نقطة تقاطع المستقيم

$$x - 4 = 5t$$
$$y + 2 = t$$
$$z - 4 = -t$$

مع المستوى $3x - y + 7y + 8 = 0$.

١٣ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2,-7,6)$ ويوازى المستوى

$$5x - 2y + z - 9 = 0.$$

١٤ - أثبت أن المستقيم

$$\begin{aligned} x - 4 &= 2t \\ y &= -t \qquad -\infty < t < +\infty \\ z + 1 &= -4t \end{aligned}$$

يوازى المستوى $3x + 2y + z - 7 = 0$.

١٥ - أثبت أن المستقيمين

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4t \\ y - 3 &= t \\ z - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x + 13 &= 12t \\ y - 1 &= 6t \\ z - 2 &= 3t \end{aligned}$$

متقاطعان . أوجد نقطة التقاطع .

١٦ - أوجد معادلة المستوى الذى يتحدد من مستقيمى تمرين ١٥

٤- الفضـــــاء الخـــــطى

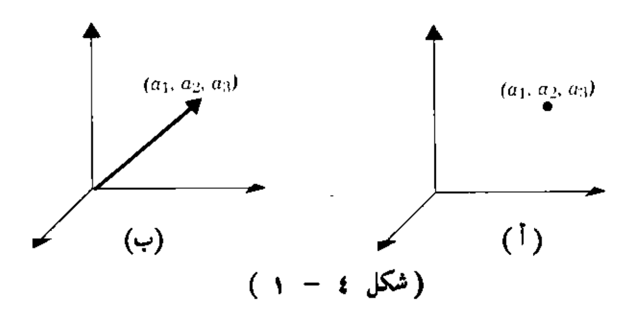
٤ ـــ ١ الفضاء الاقليدى النونى :

إن فكرة استخدام أزواج الأعداد لتعيين مواضع النقط فى المستوى وثلاثيات الأعداد لتعيين مواضع النقط فى الفضاء الثلاثى قد ظهرت لأول مرة بوضوح فى منتصف القرن السابع عشر . وفى الجزء الأخير من القرن التاسع عشر بدأ الرياضيون والفيزيائيون إدراك أنه لا يوجد ما يدعو للتوقف عند الثلاثيات . فلقد لوحظ أن رباعيات الأعداد (a_1, a_2, a_3, a_4) يمكن أن تعتبر نقطا فى فضاء « رباعى الأبعاد » ، وخماسيات الأعداد $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ نقطا فى فضاء « خماسى الأبعاد » . وهلم جرا . وعلى الرغم من أن رؤيتنا الهندسية لا تتعدى الفضاء الثلاثى ، لكن من الممكن أن يعمم الكثير من الأفكار المألوفة إلى ما بعد الفضاء الثلاثى وذلك باستخدام الخواص التحليلية والعددية للنقط والمتجهات بدلا من الخواص الهندسية . وفى هذا القسم سوف نجعل هذه الأفكار أكثر تحديدا .

تعريف : إذا كان n عددا صحيحاً موجباً ، فإن **القوس النونى المرتب** هو متتابعة من n من الأعداد الحقيقية $(a_1 \ a_2, \ldots, a_n)$. تسمى فئة جميع الأقواس النونية المرتبة بفضاء نونى ويرمز لها بالرمز R^n .

(عندما تكون $n=2$ أو $n=3$ فمن المعتاد استخدام المصطلح « زوج مرتب » و « ثلاثية مرتبة » بدلا من قوس ثنائى مرتب وقوس ثلاثى مرتب) .

قد يكون قد اتضح للقارئ عند دراسته للفضاء الثلاثى أن الرمز (a_1, a_2, a_3) له تفسيران هندسيان مختلفان . يمكن تفسيره كنقطة ، وفى هذه الحالة تكون a_1 ، a_2 ، a_3 هى الأحداثيات (شكل ٤ – ١ أ) أو يمكن أن يفسر كتجه ، وفى هذه الحالة تكون a_1 ، a_2 ، a_3 هى المركبات (شكل ٤ – ١ ب) . لهذا ينتج أن القوس النونى المرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ يمكن أن ينظر له « كتعميم للنقطة » أو « كتعميم للمتجه» ويكون الاختلاف رياضيا غير ذى بال . لذلك يمكننا بحرية أن نصف القوس الخماسى $(-2, 4, 0, 1, 6)$ أما كنقطة فى R^5 أو كتجه فى R^5 وسوف نستعمل كلا من الوصفين .



(شكل ٤ – ١)

تعريف : يقال أن المتجهين $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ فى الفضاء R^n متساويان إذا كان

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

ويعرف المجموع $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ كما يأتى :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

وإذا كان k أى عدد قياسى فإن المضاعف القياسى $k\mathbf{u}$ يعرف كما يلى :

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

تسمى عمليتا الجمع والضرب فى عدد قياسى ، فى هذا التعريف ، بالعمليتين القياسيتين على R^n .

نعرف المتجه الصفرى فى R^n بأنه المتجه

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ أى متجه فى R^n فان سالب u أو (معكوس u بالنسبة للجمع) يرمز له بالرمز $-\mathbf{u}$ ويعرف كما يلى :

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

ونعرف طرح المتجهات فى R^n هكذا $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$

أو بدلالة المركبات .

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$
$$= (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots, v_n - u_n)$$

وتشمل النظرية التالية أكثر الخواص الحسابية أهمية للجمع والمضاعفات القياسية للمتجهات فى R^n ، والبراهين جميعها سهلة ونتركها كتمارين .

نظرية ١ : إذا كان $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ، $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ متجهات فى R^n وكان k ، l عددين قياسيين فإن

(أ) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ب) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(جـ) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(د) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, أى $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(هـ) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(و) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(ز) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

(ح) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

تمكننا هذه النظرية من التعامل مع متجهات R^n بدون التعبير عن المتجهات بدلالة المركبات ، بنفس الطريقة التى نتعامل بها مع الأعداد الحقيقية . فمثلا لحل معادلة المتجهات $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$ بالنسبة إلى $\mathbf{x}$ ، يمكننا إضافة $\mathbf{-u}$ إلى كل من الطرفين ثم نكمل كما يلى :

$$(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$$
$$\mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

قد يجد القارئ أنه من المفيد الإشارة إلى أجزاء نظرية ١ التى تحقق خطوات هذه الحسابات .

لتعميم مفاهيم المسافة والمقياس والزاوية إلى R^n ، نبدأ بالتعميم التالى للضرب القياسى فى R^2 ، R^3 (قسم ٣ - ٣) .

تعريف : إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ أى متجهين فى R^n فإن **الضرب الداخلى الإقليدى** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ يعرف هكذا

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

لاحظ أنه عندما $n = 2$ أو $n = 3$ ، فإن الضرب الداخلى الإقليدى يصبح الضرب القياسى العادى (قسم ٣ - ٣) .

مثال (١) :

حاصل الضرب الداخلى الإقليدى للمتجهين

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (5, -4, 7, 0)$$

فى R^4 هو

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

تشمل النظرية التالية الخواص الحسابية الأساسية للضرب الداخلى الإقليدى .

نظرية ٢ : إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ متجهات فى R^n وكان k أى عدد قياسى فإن :

(أ) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(ب) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(جـ) $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(د) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ بالإضافة إلى ذلك $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

سنثبت الجزئين (ب) ، (د) ونترك إثبات الباقى كتمرينات .

الإثبات (ب) : اعتبر أن $\mathbf{u} = (u_1, u_2 \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ، $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ فيكون :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \cdots + (u_n + v_n)w_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\end{aligned}$$

(د) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0.$ بالإضافة إلى ذلك فإن المتساوية تتحقق إذا وفقط إذا كان $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$ أى إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

مثـال (٢) :

تسمح لنا نظرية ٢ باجراء العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الداخلى الإقليدى بنفس الطريقة تماما التى تجرى بها العمليات الحسابية الخاصة بالضرب الحسابى العادى . فمثلا

$$\begin{aligned}(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (3\mathbf{u}) \cdot (4\mathbf{u}) + (3\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (4\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 8(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 12(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 11(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

على القارئ أن يحدد أى جزء من نظرية ٢ قد استخدم فى كل خطوة .

بالرجوع إلى الصيغ المعروفة فى R^2 ، R^3 ، فإننا نعرف **المقياس الإقليدى** (**أو الطول الإقليدى**) للمتجه $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ فى الفضاء R^n بأنه

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

بالمثل فإن **المسافة الإقليدية** بين النقطتين $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ تعرف بأنها

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

مثـال (٣) :

إذا كان $\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7)$ ، $\mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$ فإن

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

وأيضاً

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$

حيث أن الكثير من الأفكار المعروفة من الفضاء الثنائى والفضاء الثلاثى قد عممت ، فن المعتاد أن نشير إلى R^n مع عمليات الجمع والضرب فى أعداد قياسية والضرب الداخلى ، التى عرفت الآن ، بأنه **الفضاء الإقليدى النونى** .

نهى هذا القسم بملاحظة أن كثيرا من الكتاب يفضلون استخدام الرمز بالمصفوفة

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

بدلا من الرمز الأفقى $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ليدل على المتجهات فى R^n ويبرر ذلك أن عمليات المصفوفات

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix}$$

تعطى نفس النتائج مثل عمليات المتجهات

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

ويكون الفرق الوحيد هو أن النتائج تكتب رأسية فى حالة منهما وأفقية فى الحالة الأخرى . وسوف نستخدم كلا الرمزين من حين إلى آخر . إلا أننا من الآن فصاعدا نرمز للمصفوفات من النوع $n \times 1$ بحروف صغيرة مميزة . فنظام المعادلات الخطية سيكتب

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

بدلا من $AX = B$ كما كان يكتب من قبل .

تمارين ٤ — ١

١ — اعتبر $\mathbf{u} = (2, 0, -1, 3)$ ، $\mathbf{v} = (5, 4, 7, -1)$ ، $\mathbf{w} = 6, 2, 0, 9)$ أوجد

(أ) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (ب) $7\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ (جـ) $-\mathbf{w} + \mathbf{v}$

(د) $3(\mathbf{u} - 7\mathbf{v})$ (هـ) $-3\mathbf{v} - 8\mathbf{w}$ (و) $2\mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

٢ – اعتبر $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ هي متجهات تمرين ١ . أوجد المتجه $\mathbf{x}$ الذى يحقق المعادلة $2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}=7\mathbf{x}+\mathbf{w}$.

٣ – اعتبر $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$ ، $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$ ، $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ ، $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$ أوجد أعدادا قياسية c_1 ، c_2 ، c_3 ، c_4 بحيث يكون

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$$

٤ – بين أنه لا توجد أى أعداد قياسية c_1 ، c_2 ، c_3 بحيث يكون

$$c_1(1, 0, -2, 1) + c_2(2, 0, 1, 2) + c_3(1, -2, 2, 3) = (1, 0, 1, 0)$$

٥ – احسب المقياس الاقليدى للمتجه $\mathbf{v}$ إذا كان

(أ) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (ب) $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ (جـ) $\mathbf{v} = (2, 0, 3, -1)$ (د) $\mathbf{v} = (-1, 1, 1, 3, 6)$

٦ – اعتبر $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$ ، $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$ ، $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$. أوجد

(أ) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (ب) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (جـ) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$

(د) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (هـ) $\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (و) $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

٧ – أثبت أنه إذا كان $\mathbf{v}$ متجهاً غير صفرى فى R^n فإن مقياس $(1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$ هو 1 .

٨ – أوجد جميع الأعداد القياسية k بحيث يكون $\|k\mathbf{v}\| = 3$ حيث $\mathbf{v} = (-1, 2, 0, 3)$.

٩ – أوجد حاصل الضرب الداخلى الأقليدى $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ عندما

(أ) $\mathbf{u} = (-1, 3), \mathbf{v} = (7, 2)$ (ب) $\mathbf{u} = (3, 7, 1), \mathbf{v} = (-1, 0, 2)$

(جـ) $\mathbf{u} = (1, -1, 2, 3), \mathbf{v} = (3, 3, -6, 4)$ (د) $\mathbf{u} = (1, 3, 2, 6, -1), \mathbf{v} = (0, 0, 2, 4, 1)$

١٠ – (أ) أوجد متجهين فى R^2 المقياس الأقليدى لكل منهما هو 1 وبحيث يكون حاصل الضرب الداخلى الأقليدى لكل منهما مع $(-2, 4)$ هو الصفر .

(ب) أثبت أنه يوجد عدد لانهائى من المتجهات فى R^3 المقياس الأقليدى لأى منهما هو 1 وبحيث يكون حاصل الضرب الداخلى الاقليدى لأى منهما مع $(-1, 7, 2)$ هو الصفر .

١١ – أوجد المسافة الأقليدية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ عندما يكون

(أ) $\mathbf{u} = (2, -1), \mathbf{v} = (3, 2)$ (ب) $\mathbf{u} = (1, 1, -1), \mathbf{v} = (2, 6, 0)$

(جـ) $\mathbf{u} = (2, 0, 1, 3), \mathbf{v} = (-1, 4, 6, 6)$ (د) $\mathbf{u} = (6, 0, 1, 3, 0), \mathbf{v} = (-1, 4, 2, 8, 3)$

١٢ – أثبت المتطابقة

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

لمتجهات R^n . فسر هذه النتيجة هندسياً فى R^2 .

١٣ – أثبت المتطابقة

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

لمتجهات R^n .

١٤ – حقق الأجزاء (ب) ، (هـ) ، (و) ، (ز) من نظرية (١) عندما يكون

$$\mathbf{u} = (1, 0, -1, 2),\ \mathbf{v} = (3, -1, 2, 4), \mathbf{w} = (2, 7, 3, 0),\ k = 6, \text{ and } l = -2$$

١٥ – حقق الجزءين (ب) ، (جـ) من نظرية (٢) لقيم $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ ، k الموجودة فى تمرين (١٤) .

١٦ – أثبت (أ) بواسطة (د) فى نظرية (١) .

١٧ – أثبت (هـ) بواسطة (ح) فى نظرية (١) .

١٧ – أثبت (هـ) بواسطة (ح) فى نظرية (١)

١٨ – أثبت (أ) ، (جـ) فى نظرية (٢) .

٤ – ٢ الفضاء الخطى العام

فى هذا القسم سنعمم مفهوم المتجه إلى درجة أبعد. سنذكر مجموعة من الفروض التى إذا تحققت لأى مجموعة من الأشياء يجيز لها أن تسمى متجهات . وسنختار الفروض بتجريد الخواص الأكثر أهمية للمتجهات فى R^n ، وكنتيجة لهذ فإن متجهات R^n ستحقق هذه الفروض تلقائياً . لهذا فإن مفهومنا الجديد عن المتجهات سوف يتضمن المتجهات التى عرفناها من قبل وأيضاً الكثير من الأنواع الجديدة من المتجهات .

تعريف : اعتبر أن V فئة اختيارية من الاشياء معرف عليها عمليتان ، الجمع والضرب فى أعداد قياسية (أعداد حقيقية) . ونقصد بالجمع قاعدة تعطى لكل زوج من الأشياء $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ من V عنصراً $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ يسمى **مجموع** $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ونقصد بالضرب فى أعداد قياسية قاعدة تعطى لكل عدد قياسى k ولكل شيء $\mathbf{u}$ من V عنصراً $k\,\mathbf{u}$ يسمى **بالمضاعف القياسى** للشيء $\mathbf{u}$ بواسطة k . إذا تحققت الفروض التالية لجميع الأشياء $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ وجميع الأعداد القياسية k ، l فإننا نسمى V **بفضاء خطى** ونسمى الأشياء الموجودة فى V **بمتجهات** :

١ – إذا كان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ شيئين من V فإن $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ من V .

٢ – $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

٣ – $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.

٤ – يوجد شيء هو $\mathbf{0}$ من V بحيث يكون $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}$ لكل $\mathbf{u}$ من V .

٥ – لكل $\mathbf{u}$ من V يوجد شيء هو $-\mathbf{u}$ من V ويسمى بسالب $\mathbf{u}$ بحيث يكون $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

٦ – إذا كان k أى عدد حقيقى و كان $\mathbf{u}$ أى شيء من V فإن $k\,\mathbf{u}$ يكون من V

٧ – $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

٨ – $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

٩ – $k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$

١٠ – $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

المتجه $\mathbf{0}$ فى الفرض (٤) يسمى **بالمتجه الصفرى** للفضاء V .

قد يكون من الضرورى فى بعض التطبيقات أن نتداول فضاءات خطية بحيث تكون الأعداد القياسية أعداداً مركبة بدلا من أعداد حقيقية ، مثل هذه الفضاءات الخطية تسمى **بالفضاءات الخطية المركبة** . ولكن فى هذا المرجع ستكون جميع الأعداد القياسية حقيقية .

يجب أن يتنبه القارىء إلى أنه فى تعريف الفضاء الخطى لايوجد تخصيص لطبيعة المتجهات أو للعمليتين . أى نوع من الأشياء مهما كانت يمكن أن تصلح كتجهات وكل ماهو مطلوب هو أن تتحقق فروض الفضاء الخطى . وسوف تعطى الامثلة التالية بعض التصور عن عدد الأشكال للفضاءات الخطية الممكنة .

مثال (٤) :

الفئة $V = R^n$ مع العمليتين القياسيتين للجمع والضرب فى أعداد قياسية المعرفتين فى القسم السابق تكون فضاءاً خطياً . ينتج الفرضان (١) ، (٦) من التعريف القياسى للعمليات فى R^n وتنتج بقية الفروض من نظرية ١ .

مثال (٥) :

اعتبر V أى مستوى يمر بنقطة الأصل فى R^3 . سنثبت أن جميع النقاط فى V تكون فضاء خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين للجمع والضرب فى أعداد قياسية للمتجهات فى R^3 .

نعلم من مثال ٤ أن R^3 فضاء خطى بالنسبة إلى هاتين العمليتين . لذلك فإن الفروض (٢) ، (٣) ، (٧) ، (٨) ، (٩) ، (١٠) تتحقق لجميع نقط R^3 ومن ثم لجميع النقط فى المستوى V . لذلك نحتاج فقط إلى إثبات أن الفروض (١) ، (٤) ، (٥) ، (٦) متحققة .

حيث أن المستوى يمر بنقطة الأصل فتكون معادلته على الصورة

$$ax + by + cz = 0 \tag{4.1}$$

(نظرية ٦ بالباب الثالث) . فإذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ نقطتين من V ، فإن $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ وأيضاً $av_1 + bv_2 + cv_3 + = 0$. جمع هاتين المعادلتين يعطى

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

تخبرناهذه المتساوية بأن إحداثيات النقطة $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ تحقق (4.1)، لهذا فإن $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ تقع فى المستوى V . هذا يثبت أن الفرض (١) متحقق . بضرب $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ فى -1 نحصل على

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

وإذن $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ تقع فى V . وهذا يحقق الفرض (٥) . تحقيق الفرضين (٤ ، ٦) نتركه كتمرينين .

مثـــال (٦) :

تكون النقط الواقعة على مستقيم V يمر بنقطة الأصل فى R^3 فضاءا خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين للجمع والضرب فى أعداد قياسية لمتجهات R^3 .

يشبه البرهان ذلك البرهان المستخدم فى تمرين (٥) ويعتمد على حقيقة أن نقط V تحقق معادلات بارامترية على الصورة

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= bt \qquad -\infty < t < +\infty \\ z &= ct \end{aligned}$$

(قسم ٣ — ٥) . ونترك التفاصيل كتمرين .

مثـــال (٧) :

الفئة V المكونة من جميع المصفوفات من النوع $m \times n$ بمكونات حقيقية مع عمليتى الجمع والضرب فى أعداد قياسية للمصفوفات تكون فضاءا خطياً . المصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$ تكون هى المتجه الصفرى $\mathbf{0}$. وإذا كان المتجه $\mathbf{u}$ هو المصفوفة A من النوع $m \times n$ فإن المصفوفة $-A$ تكون هى المتجه $-\mathbf{u}$ فى الفرض (٥) . تتحقق معظم الفروض الباقية باستخدام نظرية (٢) فى القسم (١ — ٥) . سنرمز لهذا الفضاء الخطى بالرمز M_{mn} .

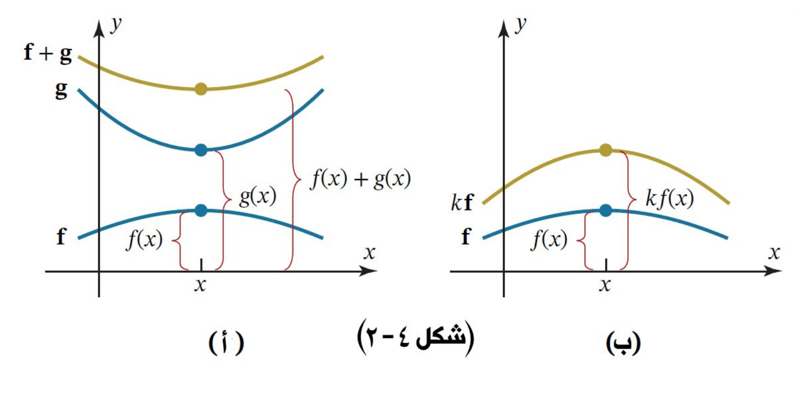
مثـــال (٨) :

اعتبر أن V هو الفئة المكونة من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على الخط المستقيم الحقيقى بأكمله . إذا كانت $\mathbf{f} = f(x)$ و $\mathbf{g} = g(x)$ أى دالتين منها وكان k أى عدد حقيقى فإننا نعرف دالة المجموع $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ والمضاعف القياسى $k\mathbf{f}$ كما يلى :

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x)$$
$$(k\mathbf{f})(x) = kf(x)$$

وبعبارة أخرى فإن قيمة الدالة $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ عند x نحصل عليها بجمع قيمتى $\mathbf{f}$ ، $\mathbf{g}$ عند x (شكل ٤ — ٢ أ) . بالمثل قيمة $k\mathbf{f}$ عند x هى k من المرات لقيمة $\mathbf{f}$ عند x (شكل ٤—٢ ب) . تكون الفئة V فضاءا خطياً بالنسبة إلى هاتين العمليتين .

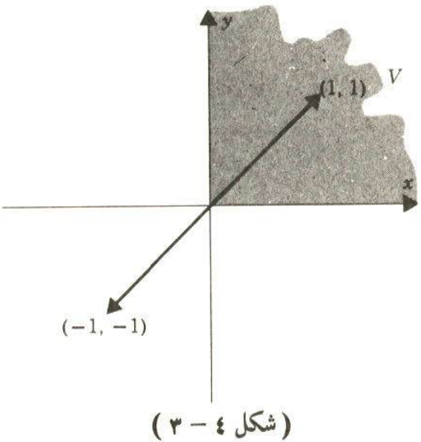
ويكون المتجه الصفرى لهذا الفضاء هو الدالة الثابتة الصفرية ، أى هى الدالة التى يكون رسمها البيانى هو المستقيم الأفقى المار بنقطة الأصل . ويعتبر تحقيق بقية الفرضيات تمرينا .



(أ) **(شكل ٤-٢)** (ب)

مثـــال (٩) :

اعتبر أن V هى فئة جميع النقط (x, y) فى R^2 التى تقع فى الربع الأول ، أى بحيث يكون $x \geq 0$ ، $y \geq 0$. تفشل الفئة V فى أن تكون فراغاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين على R^2 ، حيث أن الفرضين ٥ ، ٦ غير متحققين . لإثبات هذا لاحظ أن $\mathbf{v} = (1,1)$ يقع فى V بينما $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1,-1)$ لا يقع (شكل ٤ – ٣) .



(شكل ٤ – ٣)

مثـــال (١٠) :

اعتبر أن V تتكون من شىء واحد والذى نرمز له بالرمز $\mathbf{0}$ ، وعرف

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

لأى عدد قياسى k ∴ من السهل اختبار تحقق جميع فروض الفضاء الخطى . يسمى هذا **بالفضاء الخطى الصفرى** .

وكلما نتقدم سنضيف أمثلة أخرى للفضاءات الخطية . ونختم هذا القسم بنظرية تعطى قائمة مفيدة لخواص المتجهات .

نظرية ٣ : اعتبر V فضاءاً خطياً ، $\mathbf{u}$ متجه من V ، k عدد قياسى ، فيكون

(أ) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(ب) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(جـ) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(د) إذا كان $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ فإن $k = 0$ أو $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

الإثبـات : سنثبت الجزءين (أ) ، (جـ) ونترك إثبات الجزءين الباقيين كتمرين .

(أ) يمكننا كتابة

$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} \qquad \text{(الفرض ٨)}$$
$$= 0\mathbf{u} \qquad \text{(إحدى خواص العدد 0)}$$

من الفرض (٥) يكون للمتجه $\mathbf{0u}$ متجه سالب $\mathbf{-0u}$. بإضافة هذا السالب إلى كل من الطرفين السابقين نحصل على :

$$[0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}] + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

أى $0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$ (الفرض ٣)

أى $0\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (الفرض ٥)

أى $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (الفرض ٤)

(جـ) لاثبات أن $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ يجب أن نبين أن $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. لإثبات ذلك نلاحظ أن :

$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}$ (الفرض ١٠)

$= (1 + (-1))\mathbf{u}$ (الفرض ٨)

$= 0\mathbf{u}$ (خاصية من خواص الأعداد)

$= \mathbf{0}$ (الجزء أ السابق)

تمارين ٤ — ٢

فى التمارين ١ — ١٤ تعطى فئة من الأشياء مع عمليتين للجمع والضرب فى أعداد قياسية . حدد أى الفئات تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطيتين . بالنسبة إلى الفئات التى لا تكون فضاءا خطياً اذكر جميع الفروض التى لاتتحقق .

١ — فئة جميع الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين .

$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ و $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

٢ — فئة جميع الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين

$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ و $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$

٣ — فئة جميع الأزواج (x, y) من الأعداد الحقيقية بالنسبة إلى العمليتين

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ و $k(x, y) = (2kx, 2ky)$

٤ — فئة جميع الأعداد الحقيقية x ، مع عمليتى الجمع والضرب العاديين .

٥ — فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية التى على الصورة $(x, 0)$ مع العمليتين القياسيتين على R^2 .

٦ — فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية التى على الصورة (x, y) حيث $x \geq 0$ ، مع العمليتين القياسيتين على R^2 .

٧ — فئة جميع الأقواس النونية من الأعداد الحقيقية التى على الصورة $(x, x, \ldots, x)$ مع العمليتين القياسيتين على R^n .

٨ – فئة جميع أزواج الأعداد الحقيقية (x, y) مع العمليتين .

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \quad \text{و} \quad k(x, y) = (kx, ky)$$

٩ – فئة جميع الأعداد الحقيقية x مع العمليتين $x + x' = x\,x'$ و $kx = x^k$.

١٠ – فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصور :

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جميع المصفوفات وضرب المصفوفات في أعداد قياسية .

١١ – فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب في أعداد قياسية .

١٢ – فئة جميع الدوال f ذات القيمة الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله وبحيث يكون $f(1) = 0$ مع العمليتين المعرفتين في مثال (٨) .

١٣ – فئة جميع المصفوفات من النوع 2×2 التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & a + b \\ a + b & b \end{bmatrix}$$

مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب في أعداد قياسية .

١٤ – الفئة التي عنصرها الوحيد هو القمر . والعمليتان هما القمر + القمر = القمر ، k القمر = القمر حيث k عدد حقيقي .

١٥ – أثبت أن المستقيم المار بنقطة الأصل في R^3 يكون فضاءا خطياً بالنسبة إلى العمليتين القياسيتين على R^3 .

١٦ – أكمل التفاصيل الناقصة في مثال ٥ .

١٧ – أكمل التفاصيل الناقصة في مثال ٨ .

١٨ – أثبت الجزء (جـ) من نظرية ٣ .

١٩ – أثبت الجزء (د) ن نظرية ٣ .

٢٠ – أثبت أنه لايمكن أن يكون للفضاء الخطي أكثر من متجه صفري واحد .

٢١ – أثبت أن المتجه له بالضبط متجه سالب واحد .

٤ – ٣ الفضاءات الجزئية

إذا كان V فضاءا خطياً ، فإن بعض الفئات الجزئية للفضاء V تكون بدورها فضاءات خطية بالنسبة إلى جمع المتجهات والضرب في أعداد قياسية المعرفان على V . سوف ندرس في هذا القسم مثل هذه الفئات الجزئية بالتفصيل .

تعريف : أى فئة جزئية W للفضاء الخطى V تسمى **بفضاء جزئى** للفضاء V إذا كان W بدوره فضاءا خطياً بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية المعرفان على V .

فمثلا المستقيمات والمستويات التى تمر بنقطة الأصل هى فضاءات جزئية للفضاء R^3 (مثالا ٥ ، ٦) .

بصورة عامة . يجب أن يثبت الشخص الفروض العشرة للفضاء الخطى لكى يبين أن الفئة W مع الجمع والضرب فى أعداد قياسية تكون فضاءا خطياً ولكن على الرغم من ذلك ، إذا كان W جزءاً من فئة أكبر V التى تكون بالفعل فضاءاً خطياً ، فإن بعض الفروض لاتحتاج إلى تحقيق للفضاء W لأنها تورث من V . فمثلا لاتوجد حاجة للتأكد من أن $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (الفرض ٢) للفضاء W لأنها تتحقق لجميع المتجهات فى V ومن ثم لجميع المتجهات فى W . وتكون بقية الفروض الموروثة من V إلى W هى ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ . لذلك لكى نبين أن الفئة W هى فضاء جزئى للفضاء الخطى V نحتاج فقط لتحقيق الفروض ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ . وتبين النظرية التالية أنه حتى الفرضين ٤ ، ٥ يمكن الاستغناء عنهما .

نظرية ٤ : إذا كانت W فئة مكونة من متجه أو أكثر من الفضاء الخطى V فإن W تكون فضاءا خطياً إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين فى W فإن $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ أيضاً فى W .

(ب) إذا كان k أى عدد قياسى وكان $\mathbf{u}$ أى متجه فى W فإن $k\mathbf{u}$ أيضاً فى W .

(يوصف عادة الشرطان (أ) ، (ب) بالقول بأن W **مغلق بالنسبة إلى الجمع ومغلق بالنسبة إلى الضرب فى أعداد قياسية**) .

الاثبات : إذا كان W فضاءا جزئياً من V فإن جميع فروض الفضاء الخطى تكون متحققة وبصفة خاصة يتحقق الفرضان ١ ، ٦ . ولكن هذان الفرضان هما بالتحديد الشرطان (أ) ، (ب) .

بالعكس نفرض تحقق الشرطين (أ) ، (ب) . حيث أن هذين الشرطين هما فرضاً الفضاء الخطى ١ و ٦ ، لذلك نحتاج فقط لإثبات أن W يحقق بقية الفروض الثمانية . الفروض ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ تتحقق تلقائياً للمتجهات الموجودة فى W حيث أنها تتحقق لجميع المتجهات الموجودة فى V . لذلك لإكمال الاثبات نحتاج فقط للتأكد من أن الفرضين ٤ ، ٥ يتحققان فى W .

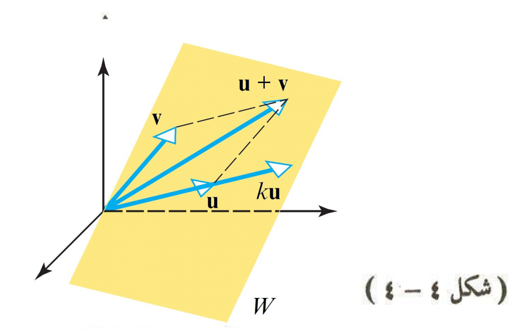
اعتبر $\mathbf{u}$ أى متجه فى W . من الشرط (ب) يكون $k\mathbf{u}$ فى W لأى عدد قياسى k . بوضع $k=0$ ينتج أن $0\,\mathbf{u}=0$ موجود فى W ، وبوضع $k=-1$ ينتج أن $(-1)\,\mathbf{u}=-\mathbf{u}$ موجود فى W .

لكل فضاء خطى V على الأقل فضاءان جزئيان . يكون V نفسه فضاءا جزئياً والفئة $\{0\}$ المكونة فقط من المتجه الصفرى للفضاء V تكون فضاءا جزئياً يسمى بالفضاء الجزئى الصفرى . وتمدنا الأمثلة التالية بصور أقل تفاهة للفضاءات الجزئية .

مثـــال (١١) :

فى المثال ٥ من قسم (٤ – ٢) قد أوضحنا أن جميع المتجهات فى أى مستوى مار بنقطة أصل R^3 تكون فضاءاً خطياً ، أى أن المستويات المارة بنقطة الأصل تكون فضاءاً جزئياً من R^3 . ويمكننا أيضاً إثبات هذه النتيجة هندسياً من نظرية ٤ .

اعتبر W أى مستوى مار بنقطة الأصل واعتبر أن $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ أى متجهين فى W . $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ يجب أن يقع فى W لأنه يكون قطر متوازى الأضلاع المحدد من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ شكل (٤ – ٤) وأيضاً $k\mathbf{u}$ يجب أن يقع فى W لأى عدد قياسى k لأن $k\mathbf{u}$ يقع على المستقيم المار بالمتجه $\mathbf{u}$. لذلك يكون W فضاءاً جزئياً من R^3 .



(شكل ٤ – ٤)

ملحوظة : يمكن استخدام مناقشة هندسية مماثلة لتلك المستخدمة فى هذا المثال لإثبات أن المستقيمات المارة بنقطة الأصل تكون فضاءات جزئية من R^3 . يمكن إثبات (تمرين ٢٠ قسم ٤ – ٥) أن الفضاءات الجزئية من R^3 هى فقط : $\{0\}$ ، R^3 ، المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل . وأيضاً الفضاءات الجزئية من R^2 هى فقط : $\{0\}$ ، R^2 ، المستقيمات المارة بنقطة الأصل .

مثـــال (١٢) :

أثبت أن الفئة W المكونة من جميع المصفوفات من النوع 2×2 والتى تحتوى أصفاراً على القطر الرئيسى تكون فضاءاً جزئياً للفضاء الخطى M_{22} المكون من جميع المصفوفات من النوع 2×2 .

الحـــل : اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

أى مصفوفتين من W و k أى عدد قياسى . فيكون

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{bmatrix} . \quad \text{و} \quad kA = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} \\ ka_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن kA ، $A + B$ تحتويان أصفاراً على القطر الرئيسى ، فإنهما يقعان فى W . لذلك يكون W فضاءاً جزئياً ن M_{22} .

مثـال (١٣) :

اعتبر n أى عدد صحيح موجب واعتبر W الفئة المكونة من الدالة الصفرية وجميع كثيرات الحدود الحقيقية التى درجتها $\leq n$ ، أى جميع الدوات التى يمكن التعبير عنها بالصورة

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \tag{4.2}$$

حيث a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية . الفئة W تكون فضاءا جزئياً للفضاء الخطى المكون من جميع الدوال الحقيقية الذى نوقش فى مثال (٨) . لإثبات هذا اعتبر $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{q}$ هما الدالتان

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

و

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

فيكون

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

و

$$(k\mathbf{p})(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n$$

على الصورة المعطاة فى (4.2) . لذلك فإن $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ وأيضاً $k\mathbf{p}$ من W . سوف نرمز للفضاء الخطى W فى هذا المثال بالرمز P_n .

مثـال (١٤) :

(للقراء الذين قد درسوا حساب التفاضل)

نتذكر من التفاضل أنه إذا كانت $\mathbf{f}$ ، $\mathbf{g}$ دالتين متصلتين وكان k ثابتاً فإن $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ، $k\mathbf{f}$ أيضاً يكونان دالتين متصلتين . لذلك ينتج أن فئة جميع الدوال المتصلة تكون فضاءا جزئياً للفضاء الخطى المكون من جميع الدوال الحقيقية . يرمز لها الفضاء بالرمز $C(-\infty, +\infty)$. ويعتبر مثالا قريباً جداً من هذا المثال الفضاء الخطى المكون من جميع الدوال المتصلة على فترة مغلقة $a \leq x \leq b$ ويرمز لهذا الفضاء بالرمز $C[a, b]$.

مثـال (١٥) :

اعتبر النظام المكون من m من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

أو على صورة المصفوفات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يسمى أى متجه (*)

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

من R^n **بمتجه الحل** للنظام إذا كان $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ حلا للنظام . فى هذا المثال سوف نبين أن فئة متجهات الحل لنظام متجانس تكون فضاءا جزئياً من R^n .

اعتبر $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ نظاماً متجانساً من m من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل . اعتبر W هى فئة متجهات الحل واعتبر $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{s}'$ متجهين من W . لإثبات أن W مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية يجب أن نبين أن $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ ، $k\mathbf{s}$ أيضاً متجهات حل ، حيث k أى عدد قياسى . حيث أن $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{s}'$ متجهات حل فيكون

$$A\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad A\mathbf{s}' = \mathbf{0}$$

لذلك يكون

$$A(\mathbf{s} + \mathbf{s}') = A\mathbf{s} + A\mathbf{s}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

و

$$A(k\mathbf{s}) = k(A\mathbf{s}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

تبين هاتان المعادلتان أن $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ ، $k\mathbf{s}$ يحققان المعادلة $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. لذلك يكون كل من $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ ، $k\mathbf{s}$ ، متجه حل .

يسمى الفضاء الجزئى W فى هذا المثال **بفضاء الحل** للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

فى كثير من المسائل يعطى الفضاء الخطى V . ويكون من المهم إيجاد أصغر فضاء جزئى من V بحيث يحتوى فئة معينة من المتجهات $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. يقدم لنا التعريف التالى الطريقة لبناء مثل هذه الفضاءات الجزئية .

تعريف : يسمى المتجه $\mathbf{w}$ **بتركيبة خطية** من المتجهات $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ إذا أمكن التعبير عنه بالصورة

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

حيث k_1 ، k_2 ، . . . ، k_r أعداد قياسية .

(*) تستخدم فى هذا المثال صورة المصفوفات للمتجهات فى R^n .

مثـال (١٦) :

اعتبر المتجهين $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ ، $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ من R^3. بين أن $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ يكون تركيبة خطية من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ وأن $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ لايكون تركيبة خطية من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$.

الحـل : لكى يكون $\mathbf{w}$ تركيبة خطية من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، يجب أن توجد أعداد قياسية k_1 ، k_2 بحيث يكون $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ أى أن

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

أو

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

حل هذا النظام يعطى $k_1 = -3$ ، $k_2 = 2$ لذلك

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

بالمثل بالنسبة إلى $\mathbf{w}'$ ، لكى يكون تركيبة خطية من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يجب أن توجد أعداد قياسية k_1 ، k_2 بحيث يكون $\mathbf{w}' = k_1\mathbf{u} + k_2 \mathbf{v}$ أى أن

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

أو

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

مساواة المركبات المتناظرة تعطى

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

وهذا النظام من المعادلات غير متوافق (تحقق من ذلك) . وإذن لا توجد مثل هذه الأعداد القياسية . ومن ثم $\mathbf{w}'$ ليس بتركيبة خطية من $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$.

تعريف : إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ متجهات فى الفضاء الخطى V ، وكان كل متجه فى V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ فإننا نقول أن هذه المتجهات تنشىء V .

مثـــال (١٧) :

تنشىء المتجهات $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ، $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ الفضاء R^3 لأن أى متجه (a, b, c) فى R^3 يمكن كتابته على الصورة

$$(a, b, c) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

وهى تركيبة خطية من $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$.

مثـــال (١٨) :

تنشىء كثيرات الحدود 1 ، x ، x^2 ، . . . ، x^n الفضاء الخطى P_n (أنظر مثال ١٣) . حيث أن أى كثيرة حدود $\mathbf{p}$ من P_n يمكن كتابتها على الصورة

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

وهى تركيبة خطية من 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^n .

مثـال (١٩) :

حدد ما إذا كانت المتجهات

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1) \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$$

تنشىء R^3 .

الحل : يجب أن نحدد ما إذا كان أى متجه اختيارى $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ فى R^3 يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

من المتجهات $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$. التعبير عن هذه المعادلة بدلالة المركبات يعطى

أو

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

أو

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, \quad k_1 + k_3, \quad 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \qquad + \ k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

تختزل المسألة إلى تحديد ما إذا كان هذا النظام متوافقا أم لا لجميع قيم b_1، b_2 ، b_3. من الجزءين (أ) ، (د) لنظرية ١٣ فى القسم ١ - ٧ يكون هذا النظام متوافقا لجميع قيم b_1 ، b_2 ، b_3. إذا وفقط

إذا كانت مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ غير قابلة للانعكاس . ولكن $|A| = 0$ (تحقق من ذلك) وعليه تكون A غير قابلة للانعكاس ومن ثم $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ لا تنشئ R^3 .

بصورة عامة ، أى فئة معطاة من المتجهات $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فى فضاء خطى V قد تنشىء وقد لاتنشىء V. إذا كانت الفئة منشئة فإن كل متجه فى V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ...، $\mathbf{v}_r$ وإذا كانت غير منشئة فإن بعض المتجهات يمكن التعبير عنها بالمثل والبعض الآخر لا يمكن التعبير عنه . تبين لنا النظرية التالية أنه إذا جمعنا معا كل المتجهات فى V التى يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ فإننا نحصل على فضاء جزئى للفضاء V وهو يسمى **بالفضاء الخطى المنشأ من** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ أو للتبسيط **بالفضاء المنشأ من** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$.

نظرية ٥ : إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ متجهات فى الفضاء الخطى V فإن :

(أ) الفئة W المكونة من جميع التركيبات الخطية للمتجهات $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ تكون فضاءا جزئيا للفضاء V .

(ب) W هى الفضاء الجزئى الأصغر للفضاء V الذى يحتوى $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$. بمعنى أن أى فضاء جزئى آخر للفضاء V يحتوى $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ يجب أن يحتوى W .

الإثبات :

(أ) لإثبات أن W فضاء جزئى من V يجب أن نثبت أنه مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية . إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين فى W فإن

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$$

وأيضاً

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

حيث c_1، c_2، ...، c_r ، k_1 ، k_2 ، . . . ، k_r أعداد قياسية . لذلك

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_r + k_r)\mathbf{v}_r$$

ويكون لأى عدد قياسى k .

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{v}_1 + (kc_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (kc_r)\mathbf{v}_r$$

وإذن $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ وأيضاً $k\mathbf{u}$ يكونان تركيبتين خطيتين من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ ومن ثم يقعان فى W وعليه فإن W مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية .

(ب) أى متجه $\mathbf{v}_i$ هو تركيبة خطية من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ حيث أنه يمكننا كتابة

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 1\mathbf{v}_i + \cdots + 0\mathbf{v}_r$$

فالفضاء الجزئى W يحتوى كلا من المتجهات $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$. افترض أن W' أى فضاء جزئى آخر بحيث يحتوى $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$. حيث أن W' مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية ، لذلك يجب أن يحتوى جميع التركيبات الخطية $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r$

للمتجهات $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$

لذلك يحتوى W' كل متجه من W

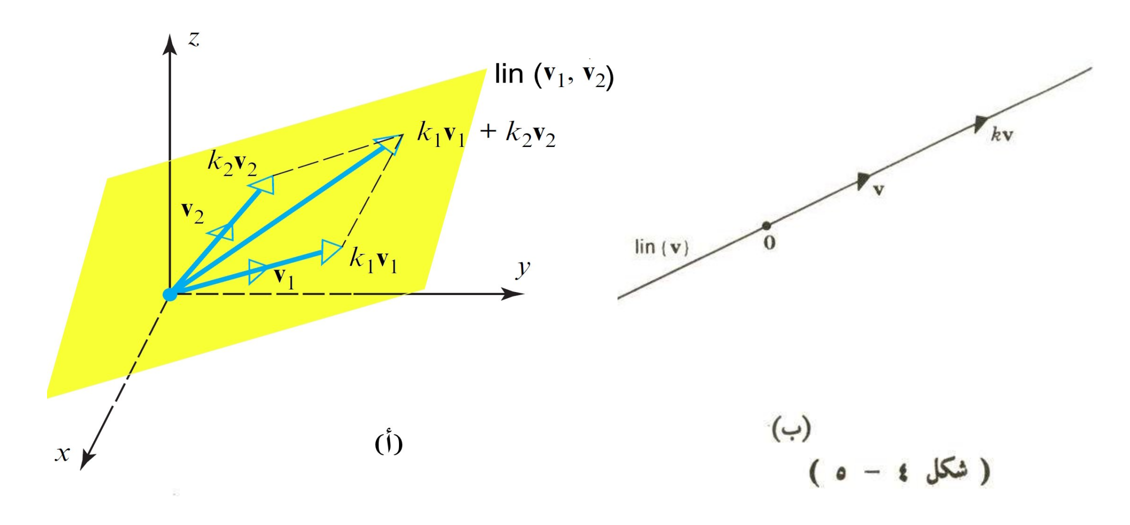
الفضاء الخطى W المنشأ من مجموعة المتجهات $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ سوف يرمز له بواسطة

$$\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} \quad \text{أو} \quad \text{lin}(S)$$

مثال (٢٠) :

إذا كان $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ متجهين ليسا على استقامة واحدة فى R^3 وكانت نقطتا البداية لهما عند نقطة الأصل فإن $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ، الذى يتكون من جميع التركيبات الخطية $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ ، هو المستوى المحدد بواسطة $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ (شكل ٤ - ٥ أ) .

بالمثل ، إذا كان $\mathbf{v}$ متجها غير صفرى فى R^2 أو R^3 فإن $\text{lin}\{\mathbf{v}\}$ الذى يكون فئة جميع المضاعفات القياسية $k\mathbf{v}$ ، هو المستقيم المحدد بواسطة $\mathbf{v}$ (شكل ٤ - ٥ ب) .



(شكل ٤ - ٥)

تمارين ٤ — ٣

١ – استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاءا جزئيا من R^3 .

(أ) جميع المتجهات التي على الصورة $(a, 0, 0)$.

(ب) جميع المتجهات التي على الصورة $(a, 1, 1)$.

(جـ) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c$.

(د) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c + 1$.

٢ – استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاءا جزئياً من M_{22} .

(أ) جميع المصفوفات التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

حيث a ، b ، c ، d أعداد صحيحة .

(ب) جميع المصفوفات التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

حيث $a + d = 0$.

(جـ) جميع المصفوفات A من النوع 2×2 بحيث يكون $A = A^t$.

(د) جميع المصفوفات A من النوع 2×2 بحيث يكون $\det\ (A) = 0$.

٣ – استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاءا جزئيا من P_3 .

(أ) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التي فيها $a_0 = 0$.

(ب) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التي فيها $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(جـ) جميع كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ التي فيها a_0 ، a_1 ، a_2 ، a_3 أعداد صحيحة .

(د) جميع كثيرات الحدود التي على الصورة $a_0 + a_1 x$ حيث a_0 ، a_1 أعداد حقيقية .

٤ – استخدم نظرية ٤ لتحديد أى مما يلي يكون فضاءا جزئيا لفضاء جميع الدوال ذات القيم الحقيقية f المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله .

(أ) جميع f بحيث يكون $f(x) \leq 0$ لجميع x .

(ب) جميع f بحيث يكون $f(0) = 0$.
(جـ) جميع f بحيث يكون $f(0) = 2$.
(د) جميع الدوال الثابتة .
(هـ) جميع f التي على الصورة $k_1 + k_2 \sin x$ بحيث يكون k_1 ، k_2 عددين حقيقيين .

٥ – أي مما يلي يكون تركيبة خطية من $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ ، $\mathbf{v} = (2, 4, 0)$

(أ) $(3, 3, 3)$ (ب) $(4, 2, 6)$ (جـ) $(1, 5, 6)$ (د) $(0, 0, 0)$

٦ – عبر عما يلي كتركيبة خطية من $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$ ، $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ ، $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$

(أ) $(5, 9, 5)$ (ب) $(2, 0, 6)$ (جـ) $(0, 0, 0)$ (د) $(2, 2, 3)$

٧ – عبر عما يلي كتركيبة خطية من

$$\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2,\ \mathbf{p}_2 = 1 - x + 3x^2,\ \mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

(أ) $5 + 9x + 5x^2$ (ب) $2 + 6x^2$ (جـ) 0 (د) $2 + 2x + 3x^2$

٨ – أي مما يلي يكون تركيبة خطية من

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(أ) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

٩ – في كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات المعطاة تنشئ R^3 .

(أ) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 0, 0)$
(ب) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_2 = (4, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$
(جـ) $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4), \mathbf{v}_2 = (2, -3, 5), \mathbf{v}_3 = (5, -2, 9), \mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$
(د) $\mathbf{v}_1 = (1, 3, 3), \mathbf{v}_2 = (1, 3, 4), \mathbf{v}_3 = (1, 4, 3), \mathbf{v}_4 = (6, 2, 1)$

١٠ – حدد أي مما يلي يقع في الفراغ المنشأ من

$\mathbf{f} = \cos^2 x$ و $\mathbf{g} = \sin^2 x$

(أ) $\cos 2x$ (ب) $3 + x^2$ (جـ) 1 (د) $\sin x$

١١ – حدد ما إذا كانت كثيرات الحدود التالية تنشئ P_3 .

$\mathbf{p}_1 = 1 + 2x - x^2 \qquad \mathbf{p}_2 = 3 + x^2$
$\mathbf{p}_3 = 5 + 4x - x^2 \qquad \mathbf{p}_4 = -2 + 2x - 2x^2$

١٢ – افترض $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3),\ \mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$

أى من المتجهات التالية تقع فى $\text{lin}\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ؟

(أ) $(2, 3, -7, 3)$ (ب) $(0, 0, 0, 0)$ (جـ) $(1, 1, 1, 1)$ (د) $(-4, 6, -13, 4)$

١٣ – أوجد معادلة المستوى المنشأ بالمتجهين $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ ، $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$.

١٤ – أوجد المعادلات البارامترية للخط المنشأ بالمتجه $\mathbf{u} = (2, 7, -1)$.

١٥ – أثبت أن متجهات الحل لنظام غير متجانس متوافق مكون من m معادلة خطية فى n مجهول لا تكون فضاءا جزئياً من R^n .

١٦ – **(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل)** . أثبت أن الفئات التالية من الدوال هى فضاءات جزئية للفضاء الخطى فى مثال ٨ .

(أ) جميع الدوال المتصلة عند كل نقطة .

(ب) جميع الدوال القابلة للتفاضل عند كل نقطة .

(جـ) جميع الدوال القابلة للتفاضل عند كل نقطة وتحقق أن $\mathbf{f}' + 2\ \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

٤ – ٤ الاستقلال الخطى

من قسم ٤ – ٣ ، يكون الفضاء الخطى منشأ بواسطة فئة المتجهات $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ إذا كان كل متجه من V هو تركيبة خطية من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$. الفئات المنشئة مفيدة فى بعض النوعيات من المسائل حيث أنه أحيانا يمكن دراسة فضاء خطى V بدراسة المتجهات فى فئة منشئة S أولا ، ثم تعميم النتائج إلى بقية V . لذلك فن المرغوب فيه الإبقاء على الفئات المنشئة S صغيرة قدر استطاعتنا . وتعتمد مسألة إيجاد الفئة المنشئة الأصغر لفضاء خطى على فكرة الاستقلال الخطى وهى التى سندرسها فى هذا القسم .

إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة من المتجهات ، فإن معادلة المتجهات

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

لها على الأقل حل واحد هو

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$$

إذا كان هذا هو الحل الوحيد ، فان S تسمى **فئة مستقلة خطياً** . إذا كانت هناك حلول أخرى فإن S تسمى **فئة غير مستقلة خطياً** .

مثال (٢١) :

فئة المتجهات $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ حيث

$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3),\ \mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)\ \mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$

غير مستقلة خطيا حيث أن $3\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$

مثال (٢٢) :

كثيرات الحدود $\mathbf{p}_1 = 1 - x,\ \ \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2\mathbf{x}^2,\ \ \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$

تكون فئة غير مستقلة خطيا فى P_2 حيث أن $3\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} + 2\mathbf{p_3} = \mathbf{0}$.

مثال (٢٣) :

اعتبر المتجهات $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ و $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

من R^3 . بدلالة المركبات فإن معادلة المتجهات

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

تصبح

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

أو بصورة مكافئة

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

أى

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0$$

وإذن الفئة $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ مستقلة خطياً . ويمكن استخدام برهان مماثل لإثبات أن المتجهات

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

تكون فئة مستقلة خطيا فى R^n .

مثال (٢٤) :

حدد ما إذا كانت المتجهات

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3) \qquad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1) \qquad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

تكون فئة مستقلة خطيا أم فئة غير مستقلة خطيا .

الحل : بدلالة المركبات فإن معادلة المتجهات

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

تصبح

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

أو بصورة مكافئة

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

تعطى مساواة المركبات المتناظرة

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

لذلك فإن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ تكون فئة غير مستقلة خطيا إذا كان لهذا النظام حل غير تافه ، أو تكون فئة مستقلة خطياً إذا كان له فقط الحل التافه . بحل هذا النظام نحصل على

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}t \qquad k_2 = -\tfrac{1}{2}t \qquad k_3 = t$$

فالنظام له حلول غير تافهة وتكون $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ فئة غير مستقلة خطياً ، وبديل لذلك كان بامكاننا إثبات وجود حلول غير تافهة بدون حل النظام ولكن باثبات أن مصفوفة المعاملات محددها يساوى الصفر ومن ثم غير قابلة للانعكاس (تحقق من هذا) .

اللفظ « غير مستقلة خطياً » يعطينا فكرة أن المتجهات تعتمد على بعضها البعض بطريقة ما . لكى نرى أن هذا هو الحال بالفعل ، نفرض أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة غير مستقلة خطيا . لهذا فإن معادلة المتجهات

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

لها حل آخر غير $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ وبالتحديد نفرض أن $k_1 \neq 0$ ضرب كل من الطرفين فى $1/k_1$ والحل بالنسبة إلى $\mathbf{v}_1$ يعطيان

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right)\mathbf{v}_r$$

لذلك يمكن التعبير عن $\mathbf{v}_1$ كتركيبة خطية من المتجهات الباقية $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$. نترك كتمرين إثبات أن أى فئة من متجهين أو أكثر تكون غير مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات تركيبة خطية من بقية المتجهات .

يعطى المثالان التاليان تفسيرا هندسيا للاعتماد الخطى فى R^2 و R^3 .

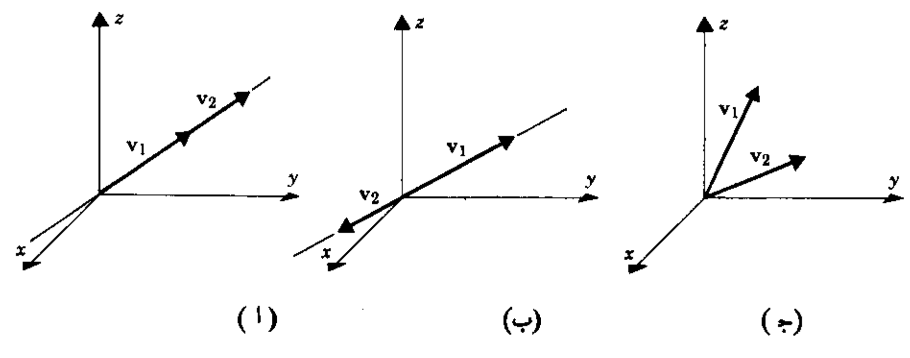
مثال (٢٥) :

يكون المتجهان $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ فئة غير مستقلين خطياً إذا وفقط إذا كان أحد المتجهين مضاعفا قياسيا للآخر . لمعرفة السبب ، نفرض أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ فئة غير مستقلة خطيا . حيث أن معادلة المتجهات $k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ لها حل آخر غير $k_1 = k_2 = 0$ فيمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يلي :

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\mathbf{v}_2 \qquad \text{أو} \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right)\mathbf{v}_1$$

ولكن هذا يخبرنا بأن $\mathbf{v}_1$ مضاعف قياسي للمتجه $\mathbf{v}_2$ أو أن $\mathbf{v}_2$ مضاعف قياسي للمتجه $\mathbf{v}_1$. والعكس متروك كتمرين .

وينتج أن أى متجهين فى R^2 أو R^3 يكونان غير مستقلين خطيا إذا وفقط إذا وقعا على نفس المستقيم المار بنقطة الأصل (شكل ٤ - ٦) .

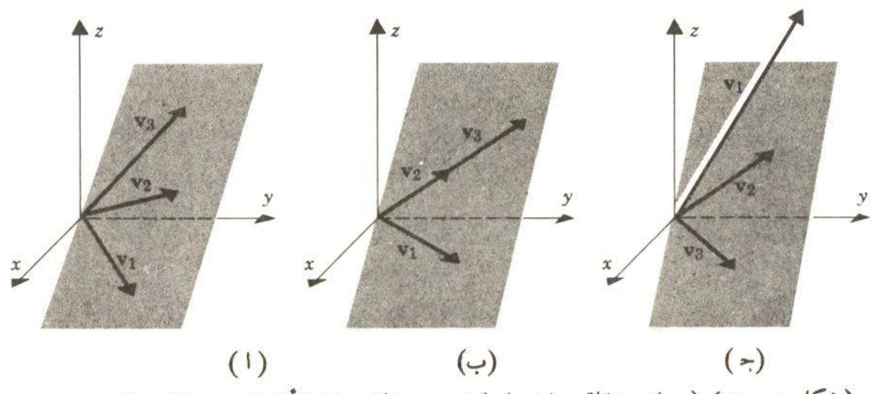


(شكل ٤ - ٦) (جـ) مستقلان خطيا (ب) غير مستقلين خطيا (أ) غير مستقلين خطيا

مثال (٢٦) :

إذا كان $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ ثلاثة متجهات فى R^3 فإن الفئة $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ تكون غير مستقلة خطيا إذا وفقط إذا وقعت المتجهات الثلاثة فى نفس المستوى المار بنقطة الأصل عندما توضع نقط بداية المتجهات عند نقطة الأصل (شكل ٤ - ٧) . لإثبات هذا ، تذكر أن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ تكون غير مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات على الأقل تركيبة خطية من الإثنين الباقيين أوبصورة مكافئة إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات على الأقل فى الفضاء المنشأ من الاثنين الباقيين . ولكن الفضاء المنشأ من أى متجهين فى R^3 هو إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل ، أو نقطة الأصل نفسها (تمرين ١٧) وفى أى حالة يقع الفضاء المنشأ بواسطة متجهين فى R^3 دائما فى مستوى مار بنقطة الأصل .

نختتم هذا القسم بنظرية تثبت أن أى فئة مستقلة خطيا فى R^n يمكن أن تحتوى على الأكثر n من المتجهات .



(ا) (ب) (جـ)

(شكل ٤ - ٧) (جـ) مستقلة خطيا (ب) غير مستقلة خطيا (أ) غير مستقلة خطيا .

نظرية ٦ : افترض أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة من المتجهات فى R^n إذا كان $r > n$ فإن S تكون غير مستقلة خطيا .

الإثبات : افرض أن

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})$$
$$\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_r = (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn})$$

اعتبر المعادلة

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

إذا عبرنا ، كما أوضحنا فى مثال ٢٤ ، عن كل من طرفى هذه المعادلة بدلالة المركبات ثم ساوينا المركبات المتناظرة فإننا نحصل على النظام

$$\begin{aligned}
v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \cdots + v_{r1}k_r &= 0\\
v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \cdots + v_{r2}k_r &= 0\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots\\
v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \cdots + v_{rn}k_r &= 0
\end{aligned}$$

وهذا نظام متجانس من n من المعادلات فى r من المجاهيل k_1 ، k_2 ، ... ، k_r حيث أن $r > n$ فينتج من نظرية ١ بقسم ١ - ٣ أن للنظام حلولا غير تافهة لذلك تكون $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ فئة غير مستقلة خطيا .

بوجه خاص تخبرنا هذه النظرية أن أى فئة من R^2 بها أكثر من متجهين تكون غير مستقلة خطيا . وأى فئة فى R^3 بها أكثر من ثلاثة متجهات تكون غير مستقلة خطيا .

تمارين ٤ — ٤

١ — اشرح لمـاذا يكون ما يلى فئات غير مستقلة خطياً من المتجهات (حل هذا التمرين بمجرد النظر) .

(أ) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$ ، $\mathbf{u}_2 = (-3, -6)$ فى R^2 .

(ب) $\mathbf{u}_1 = (2, 3)$ ، $\mathbf{u}_2 = (-5, 8)$ ، $\mathbf{u}_3 = (6, 1)$ فى R^2 .

(جـ) $\mathbf{p}_1 = 2 + 3x - x^2$ ، $\mathbf{p}_2 = 6 + 9x - 3x^2$ فى P_2 .

(د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ فى M_{22}

٢ — أى من المتجهات فى R^3 التالية تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $(2, -1, 4),\quad (3, 6, 2),\quad (2, 10, -4)$

(ب) $(3, 1, 1),\quad (2, -1, 5),\quad (4, 0, -3)$

(جـ) $(6, 0, -1),\quad (1, 1, 4)$

(د) $(1, 3, 3),\quad (0, 1, 4),\quad (5, 6, 3),\quad (7, 2, -1)$

٣ — أى من الفئات التالية من المتجهات فى R^4 تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $(1, 2, 1, -2),\quad (0, -2, -2, 0),\quad (0, 2, 3, 1),\quad (3, 0, -3, 6)$

(ب) $(4, -4, 8, 0),\quad (2, 2, 4, 0),\quad (6, 0, 0, 2),\quad (6, 3, -3, 0)$

(جـ) $(4, 4, 0, 0),\quad (0, 0, 6, 6),\quad (-5, 0, 5, 5)$

(د) $(3, 0, 4, 1),\quad (6, 2, -1, 2),\quad (-1, 3, 5, 1),\quad (-3, 7, 8, 3)$

٤ — أى من الفئات التالية من المتجهات فى P_2 تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $2 - x + 4x^2,\quad 3 + 6x + 2x^2,\quad 2 + 10x - 4x^2$

(ب) $3 + x + x^2,\quad 2 - x + 5x^2,\quad 4 - 3x^2$

(جـ) $6 - x^2,\quad 1 + x + 4x^2$

(د) $1 + 3x + 3x^2,\quad x + 4x^2,\quad 5 + 6x + 3x^2,\quad 7 + 2x - x^2$

٥ — افرض أن V هو الفضاء الخطى لجميع الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقى بأكمله . أى من الفئات التالية من المتجهات فى V تكون غير مستقلة خطياً ؟

(أ) $2, 4\sin^2 x, \cos^2 x$

(ب) $x, \cos x$

(جـ) $1, \sin x, \sin 2x$

(د) $\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$

(هـ) $(1 + x)^2, x^2 + 2x, 3$

(و) $0, x, x^2$

٦ – افرض أن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ متجهات فى R^3 بحيث تكون نقط البداية لها عند نقطة الأصل . فى كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات الثلاثة واقعة فى مستوى .

(أ) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{v}_2 = (3, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)$

(ب) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_2 = (4, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$

٧ – افرض أن $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ متجهات فى R^3 بحيث تكون نقط البداية لها عند نقطة الأصل . فى كل جزء حدد ما إذا كانت المتجهات الثلاثة واقعة على نفس المستقيم .

(أ) $\mathbf{v}_1 = (3, -6, 9), \mathbf{v}_2 = (2, -4, 6), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$

(ب) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4), \mathbf{v}_2 = (4, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$

(جـ) $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 4), \mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$

٨ – لأى قيم λ الحقيقية تكون المتجهات التالية فئة غير مستقلة فى R^3 ؟

$$\mathbf{v}_1 = (\lambda, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), \mathbf{v}_2 = (-\tfrac{1}{2}, \lambda, -\tfrac{1}{2}), \mathbf{v}_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \lambda)$$

٩ – اعتبر $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ فئة متجهات فى فضاء خطى V . أثبت أنه إذا كان أحد المتجهات هو المتجه الصفرى فإن S غير مستقلة خطيا .

١٠ – إذا كانت $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ فئة مستقلة خطيا من المتجهات فأثبت أن

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}, \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \{\mathbf{v}_1\}, \{\mathbf{v}_2\}, \text{and } \{\mathbf{v}_3\}$$

أيضاً فئات مستقلة خطيا .

١١ – إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ فئة مستقلة خطيا من المتجهات ، فأثبت أن كل فئة خطية جزئية من S بها متجه أو أكثر تكون مستقلة خطيا .

١٢ – إذا كانت $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ فئة غير مستقلة خطيا من المتجهات فى فضاء خطى V ، فأثبت أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ أيضاً فئة غير مستقلة خطيا حيث $\mathbf{v}_4$ أى متجه آخر فى V .

١٣ – إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة غير مستقلة خطيا من المتجهات فى فضاء خطى V فأثبت أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أيضاً غير مستقلة خطيا حيث $\mathbf{v}_{r+1}$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ أى متجهات أخرى فى V .

١٤ – أثبت أن أى فئة بها أكثر من ثلاثة متجهات من P_2 غير مستقلة خطياً .

١٥ – أثبت أنه إذا كانت $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ مستقلة خطيا وكان $\mathbf{v}_3$ لا يقع فى $\text{lin}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ فإن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ مستقلة خطيا .

١٦ – أثبت أن أى فئة من متجهين أو أكثر تكون غير مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد المتجهات يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من بقية المتجهات .

١٧ – أثبت : الفضاء المنشأ من متجهين فى R^3 إما مستقيم مار بنقطة الأصل أو مستوى مار بنقطة الأصل أو نقطة الأصل نفسها .

١٨ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) . افترض أن V هو الفضاء الخطى للدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقى بأكمله . إذا كانت **f** ، **g** ، **h** متجهات فى V بحيث تكون قابلة للتفاضل مرتين ، فإن الدالة $\mathbf{w} = w(x)$ المعرفة بواسطة

$$w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

تسمى رونسكيان **f** ، **g** ، **h** . أثبت أن **f** ، **g** ، **h** تكون فئة مستقلة خطيا إذا لم يكن الرونسكيان هو المتجه الصفرى فى V [أى أن $w(x)$ لاتساوى الصفر تطابقيا] .

١٩ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) . استخدم الرونسكيان (تمرين ١٨) لإثبات أن فئة المتجهات التالية مستقلة خطيا :

(أ) $1, x, e^x$ (ب) $\sin x, \cos x, x \sin x$ (جـ) e^x, xe^x, x^2e^x (د) $1, x, x^2$

٤ ـــ ٥ الأساس والبعد

نحن نفكر دائما فى أن المستقيم ذو بعد واحد ، والمستوى ذو بعدين والفضاء المحيط بنا ذو ثلاثة أبعاد . والهدف الأول لهذا القسم أن نجعل هذه الفكرة البديهية للبعد أكثر دقة .

تعريف : إذا كان V أى فضاء خطى و $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة منتهية من المتجهات فى V ، فإن S تسمى **بأساس** للفضاء V إذا كان

(١) S مستقلة خطياً

(٢) S تنشئ V

مثـال (٢٧) :

اعتبر $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. فى مثال ٢٣ أثبتنا أن $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ فئة مستقلة خطيا فى R^n. حيث أن أى متجه $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ فى R^n يمكن كتابته على الصورة $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n$ فان S تنشئ R^n ولذلك تكون أساساً . وتسمى **بالأساس المعتاد للفضاء** R^n .

مثـال (٢٨) :

اعتبر $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ ، $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ ، $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$. أثبت أن الفئة $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ تكون أساساً للفضاء R^3 .

الحـل : لإثبات أن S تنشئ R^3 ، يجب أن نثبت أن أى متجه اختيارى $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \tag{4.3}$$

من المتجهات الموجودة فى S . التعبير عن (4.3) بدلالة المركبات يعطى

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

أو

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

أو

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

لذلك لإثبات أن S تنشئ V يجب أن نوضح أن النظام (4.4) له حل لجميع الاختيارات $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. لإثبات أن S مستقلة خطيا يجب أن نثبت أن الحل الوحيد للمعادلة

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

هو $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

كما سبق إذا عبرنا عن (4.5) بدلالة المركبات ، فإن تحقيق الاستقلال يختزل إلى إثبات أن النظام المتجانس

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

له فقط الحل الصفرى . لاحظ أن النظامين (4.4) ، (4.6) لها نفس مصفوفة المعاملات . لذلك من الأجزاء (أ) ، (ب) ، (د) من نظرية ١٣ فى قسم ١ – ٧ يمكننا فى نفس الوقت إثبات أن S مستقلة خطيا وتنشئ R^3 باثبات أن مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

و

فى النظامين (4.4) ، (4.6) قابلة للانعكاس . حيث أن

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

فينتج من نظرية ٦ فى قسم ٢ – ٣ أن A قابلة للانعكاس . لهذا فإن S تكون أساسا للفضاء R^3 .

مثـال (٢٩) :

الفئة $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ تكون أساسا للفضاء الخطى P_n المعرف فى مثال ١٣ . من مثال ١٨ ، المتجهات الموجودة فى S تنشئ P_n . لإثبات أن S مستقلة خطيا ، نفرض أن تركيبة خطية ما من متجهات S هى المتجه الصفرى ، أى أن

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \equiv 0 \tag{4.7}$$

يجب أن نبين أن $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. من علم الجبر كثيرة الحدود غير الصفرية من درجة n لها على الأكثر n من الجذور المختلفة . حيث أن (4.7) متطابقة فإن كل قيمة من قيم x تكون جذرا للطرف الأيسر . وهذا يحتم أن $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ وإلا كانت $c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ لها أكثر من n من الجذور . على ذلك تكون S مستقلة خطيا .

الأساس S فى هذا المثال يسمى **بالأساس المعتاد للفضاء** P_n .

مثـال (٣٠) :

ليكن

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الفئة $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ تكون أساساً للفضاء الخطى M_{22} للمصفوفات من النوع 2×2 . لإثبات أن S تنشئ M_{22} ، لاحظ أن المتجه (المصفوفة) النموذجى :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

يمكن كتابته على الصورة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

لإثبات أن S مستقلة خطيا ، نفرض أن

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0$$

أى أن

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فيكون

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنها $a = b = c = d = 0$ وعليه تكون S مستقلة خطيا .

مثـال (٣١) :

إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ مجموعة مستقلة خطيا فى فضاء خطى V فإن S تكون أساسا للفضاء الجزئى $\text{lin}(S)$ حيث أن S مستقلة ومن تعريف $\text{lin}(S)$ ، فان S تنشئ $\text{lin}(S)$.

أى فضاء خطى غير صفرى V يسمى **فضاءا ذا بعد منتهى** إذا كان يحتوى فئة منتهية من المتجهات $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ التى تكون أساساً . إذا لم توجد مثل هذه الفئة فإن V يسمى **بفضاء ذى بعد لا نهائى.** بالاضافة إلى ذلك سوف نعتبر الفضاء الخطى الصفرى كفضاء منتهى الأبعاد على الرغم من أنه لا يوجد له أى فئة مستقلة خطيا ومن ثم ليس له أى أساس .

مثـال (٣٢) :

من الأمثلة ٢٧ ، ٢٩ ، ٣٠ تكون R^n ، P_n ، M_{22} فضاءات خطية محدودة البعد .

تعطينا النظرية التالية المعنى لمفهوم البعد للفضاء الخطى . ومنها سوف نحصل على واحدة من أهم النتائج فى الجبر الخطى .

نظرية ٧ : إذا كانت $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء خطى V ، فإن أى فئة بها أكثر من n من المتجهات تكون غير مستقلة خطيا .

الإثبـات : افرض $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أى فئة من m من المتجهات فى V حيث $m > n$ نرغب فى إثبات أن S' غير مستقلة خطيا . حيث أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ تكون أساسا فإن $\mathbf{w}_i$ يمكن أن نعبر عنه كتركيبة خطيا من متجهات S ولكن

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + a_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{4.8}$$

لإثبات أن S' غير مستقلة خطيا يجب أن نوجد أعدادا قياسية k_1 ، k_2 ، . . . ، k_m ليست جميعها صفرية بحيث يكون

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

باستخدام المعادلات الموجودة فى (4.8) يمكننا إعادة كتابة (4.9) على الصورة

$$\begin{aligned} &(k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbf{v}_1 \\ &\quad + (k_1a_{21} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{2m})\mathbf{v}_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

وبذلك تختزل مسألة إثبات أن S غير مستقلة خطيا إلى إثبات أنه توجد k_1 ، k_2 ، . . . ، k_m ليست جميعها أصفارا ، بحيث تحقق

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1m}k_m &= 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2m}k_m &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nm}k_m &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

حيث أن المجاهيل فى (4.10) أكثر من المعادلات فإن البرهان قد اكتمل ، حيث أن نظرية ١ من قسم ١ — ٣ تضمن وجود حلول غير تافهة .

باستخدام هذه النظرية نحصل على النتيجة التالية :

نظرية ٨ : أى أساسين لفضاء خطى ذى بعد منتهى لهما نفس العدد من المتجهات .

الإثبات : افترض أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ و $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ أساسان لفضاء خطى ذى بعد منتهى V . حيث أن S أساس و S' فئة مستقلة خطيا ، فإن نظرية ٧ تحتم أن $m \le n$ بالمثل حيث أن S' أساس و S مستقلة خطيا فيكون أيضاً لدينا $n \le m$ وإذن $m = n$.

مثـال (٣٣) :

الأساس المعتاد للفضاء R^n يحتوى n متجها (مثال ٢٧) . لهذا فإن أى أساس للفضاء R^n يحتوى n متجها .

مثـال (٣٤) :

الأساس المعتاد للفضاء P_n يحتوى $n + 1$ متجها (مثال ٢٩) ، لذا أى أساس للفضاء P_n يحتوى $n + 1$ متجها .

وعدد المتجهات فى أساس فضاء خطى ذى بعد منتهى كية لها أهمية خاصة . من مثال ٣٣ ، أى أساس للفضاء R^2 به متجهان وأى أساس للفضاء R^3 به ثلاثة متجهات . حيث أن R^2 (المستوى) بدهيا ثنائى البعد و R^3 بدهيا ثلاثى البعد ، فيكون بعد كل من هذه الفضاءات هو نفس عدد المتجهات التى تظهر فى أساساته . وهذا يقترح لنا التعريف التالى .

تعـريف : بعد فضاء خطى V ذى بعد منتهى يعرف بأنه عدد المتجهات فى أساس للفضاء V . بالإضافة إلى ذلك ، نعرف أن الفضاء الخطى الصفرى له بعد صفرى .

من المثالين ٣٣ ، ٣٤ يكون R^n فضاءا خطياً له n بعد ، ويكون P_n فضاءا خطيا له $n + 1$ بعد .

مثـال (٣٥) :

حدد أى أساس و البعد لفضاء الحل للنظام المتجانس

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \quad\quad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

الحل : من مثال ٨ فى قسم ١ - ٣ قد أثبتنا أن الحلول تعطى بواسطة

$$x_1 = -s - t \qquad x_2 = s \qquad x_3 = -t \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = t$$

لهذا فإن متجهات الحل يمكن كتابتها كما يلى :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهو ما يثبت أن المتجهين

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ينشئان فضاء الحل . حيث أنهما أيضاً مستقلان خطيا (تحقق من هذا) ، فيكون $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ أساسا ، ويكون فضاء الحل ثنائى البعد .

وبصفة عامة لإثبات أن فئة من المتجهات $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ تكون أساسا لفضاء خطى V يجب أن نثبت أن المتجهات مستقلة خطيا وتنشئ V ، إلا أنه إذا حدث وعلمنا أن V من بعد n (وإذن تحتوى الفئة $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ العدد الصحيح من المتجهات فى الأساس) ، فيكفى أن نتأكد إما من الاستقلال الخطى أو من الإنشاء وسوف يتحقق الشرط الباقى تلقائيا . وهذا هو محتوى الجزءين (أ) ، (ب) من النظرية التالية . الجزء (د) من هذه النظرية ينص على أن أى فئة مستقلة خطياً تكون جزءاً من أساس للفضاء V .

نظرية ٩ :

(أ) إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ فئة مستقلة خطيا من n من المتجهات فى فضاء V من بعد n فإن S تكون أساساً للفضاء V .

(ب) إذا كانت $S = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$ فئة من n من المتجهات بحيث تنشئ فضاءاً V من بعد n فإن S تكون أساسا للفضاء V .

(جـ) إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة مستقلة خطيا فى فضاء V من بعد n وكان $r < n$ ، فإن S يمكن توسيعها إلى أساس للفضاء V أى أنه توجد متجهات $\mathbf{v}_{r+1}$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ بحيث تكون $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء V .

نترك الإثباتات كتمارين .

مثال (٣٦) :

أثبت أن $\mathbf{v}_1 = (-3, 7)$ ، $\mathbf{v}_2 = (5, 5)$ تكون أساساً للفضاء R^2 .

الحل : حيث أن أيا من المتجهين ليس مضاعفا قياسيا للآخر ، فإن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ تكون مستقلة خطيا . حيث أن R^2 ثنائى البعد ، فإن S تكون أساسا للفضاء R^2 من الجزء (أ) من نظرية ٩ .

تمارين ٤ — ٥

١ – اشرح لماذا لا تكون الفئات التالية من المتجهات أساسات للفضاءات الخطية المشار إليها (حل هذا التمرين بمجرد النظر) .

(أ) $\mathbf{u}_1 = (1, 2), \mathbf{u}_2 = (0, 3), \mathbf{u}_3 = (2, 7)$ للفضاء R^2 .

(ب) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2), \mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ للفضاء R^3 .

(جـ) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2, \mathbf{p}_2 = x - 1$ للفضاء P_2 .

(د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ للفضاء M_{22} .

٢ – أى من الفئات التالية من المتجهات تكون أساسا للفضاء R^2 ؟

(أ) $(2, 1), (3, 0)$ (ب) $(4, 1), (-7, -8)$ (جـ) $(0, 0), (1, 3)$ (د) $(3, 9), (-4, -12)$

٣ – أى من الفئات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء R^3 ؟

(أ) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$ (ب) $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$

(جـ) $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)$ (د) $(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)$

٤ — أي من الفئات التالية من المتجهات تكون أساساً للفضاء P_2 ؟

(أ) $1 - 3x + 2x^2, \quad 1 + x + 4x^2, \quad 1 - 7x$

(ب) $4 + 6x + x^2, \quad -1 + 4x + 2x^2, \quad 5 + 2x - x^2$

(جـ) $1 + x + x^2, \quad x + x^2, \quad x^2$

(د) $-4 + x + 3x^2, \quad 6 + 5x + 2x^2, \quad 8 + 4x + x^2$

٥ — أثبت أن الفئة التالية من المتجهات أساس للفضاء M_{22} .

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

٦ — اعتبر V هو الفضاء المنشأ بواسطة $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x, \mathbf{v}_2 = \sin^2 x, \mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(أ) أثبت أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ليست أساسا للفضاء V .

(ب) أوجد أساساً للفضاء V .

في التمارين ٧ — ١٢ أوجد البعد وأساسا لفضاء الحل للنظام .

٧ —
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

٨ —
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

٩ —
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١٠ —
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

١١ —
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١٢ —
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 0 \\ 2x - 4y + z &= 0 \\ 4x + 8y - 3z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

١٣ — أوجد أساسات للفضاءات الجزئية التالية من R^3 .

(أ) المستوى $3x - 2y + 5z = 0$

(ب) المستوى $x - y = 0$

(جـ) المستقيم $-\infty < t < +\infty$
$$x = 2t, \quad y = -t, \quad z = 4t$$

(د) جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, c) حيث $b = a + c$.

١٤ – أوجد أبعاد الفضاءات الجزئية التالية من R^4 .

(أ) جميع المتجهات التى على الصورة $(a, b, c, 0)$.

(ب) جميع المتجهات التى على الصورة (a, b, c, d) حيث $d = a + b$ ، $c = a - b$.

(جـ) جميع المتجهات التى على الصورة (a, b, c, d) حيث $a = b = c = d$.

١٥ – أوجد بعد الفضاء الجزئى من P_3 الذى يتكون من جميع كثيرات الحدود $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ التى فيها $a_0 = 0$.

١٦ – اعتبر $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ أساساً للفضاء الخطى V . أثبت أن $\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$ أيضاً أساس حيث $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

١٧ – أثبت أن الفضاء الخطى المكون من جميع الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقى بأكمله لا نهائى البعد (**إرشاد** : افرض أنه ذو بعد منتهى n ثم احصل على تناقض بتقديم $n + 1$ متجها مستقلا خطيا .

١٨ – أثبت أن الفضاء الجزئى لفضاء ذى بعد منتهى يكون ذا بعد منتهى .

١٩ – افترض أن V فضاء جزئى لفضاء خطى W ذى بعد منتهى . أثبت أن بعد $(V) \leq$ بعد (W) (**إرشاد** : V ذو بعد منتهى من تمرين ١٨) .

٢٠ – أثبت أن الفضاءات الجزئية الوحيدة للفضاء R^3 هى المستقيمات المارة بنقطة الأصل ، المستويات المارة بنقطة الأصل ، الفضاء الجزئى الصفرى ، R^3 نفسه (**إرشاد** : من تمرين ١٩ يجب أن تكون الفضاءات الجزئية للفضاء R^3 صفرية البعد ، أحادية البعد ، ثنائية البعد أو ثلاثية البعد) .

٢١ – أثبت الجزء (أ) من نظرية ٩ .

٢٢ – أثبت الجزء (ب) من نظرية ٩ .

٢٣ – أثبت الجزء (جـ) من نظرية ٩ .

٤ – ٦ فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لمصفوفة – الرتبة – تطبيقات على ايجاد الأساسات

سوف ندرس فى هذا القسم بعض الفضاءات الخطية المتعلقة بالمصفوفات وسوف تعطينا النتائج طريقة بسيطة لإيجاد الأساسات باختزال المصفوفة المعينة إلى الصورة الصفية المميزة .

تعريف : اعتبر المصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى المتجهات

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

المكونة من صفوف A **بمتجهات الصفوف** للمصفوفة A وتسمى المتجهات

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

المكونة من أعمدة A **بمتجهات الأعمدة** للمصفوفة A . ويسمى الفضاء الجزئى من R^n المنشأ من متجهات الصفوف **بفضاء الصفوف** للمصفوفة A . ويسمى الفضاء الجزئى من R^m المنشأ من متجهات الأعمدة **بفضاء الأعمدة** للمصفوفة A .

مثـال (٣٧) :

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

فتكون متجهات الصفوف للمصفوفة A هى

$\mathbf{r}_1 = (2, 1, 0)$ و $\mathbf{r}_2 = (3, -1, 4)$

ومتجهات الأعمدة للمصفوفة A هى

$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

ستساعدنا النظرية التالية فى إيجاد أساسات للفضاءات الخطية . وسنؤجل إثباتها إلى نهاية القسم .

نظرية ١٠ : العمليات البسيطة على الصفوف لا تغير فضاء الصفوف لمصفوفة .

ينتج من هذه النظرية أن فضاء الصفوف لمصفوفة A لا يتغير باختزال المصفوفة إلى الصورة الصفية المميزة . ونظرا لأن متجهات الصفوف غير الصفرية على الصورة الصفية المميزة تكون دائما مستقلة خطيا (تمرين ١٤) لذلك فإن هذه المتجهات للصفوف غير الصفرية تكون أساسا لفضاء الصفوف . وعليه نحصل على النتيجة التالية .

نظرية ١١ : متجهات الصفوف غير الصفرية فى الصورة الصفية المميزة لمصفوفة تكون أساسا لفضاء الصفوف للمصفوفة A .

مثـال (٣٨) :

أوجد أساساً للفضاء المنشأ من المتجهات

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \qquad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6) \qquad \mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$$
$$\mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

الحل : الفضاء المنشأ من هذه المتجهات هو فضاء الصفوف للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

بوضع هذه المصفوفة على الصورة الصفية المميزة نحصل على (تحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات الصفوف غير الصفرية فى هذه المصفوفة هى

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \qquad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0) \qquad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

هذه المتجهات تكون أساساً لفضاء الصفوف ومن ثم أساساً للفضاء المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ ، $\mathbf{v}_4$.

ملحوظة : لقد كنا نكتب متجهات الصفوف لمصفوفة بصورة أفقية ومتجهات الأعمدة بصورة رأسية (بصورة مصفوفات) لأن هذا يبدو طبيعيا أن نفعله . ولكن على الرغم من ذلك لا يوجد أى سبب يدعونا إلى عدم كتابة متجهات الصفوف فى صورة رأسية ومتجهات الأعمدة فى صورة أفقية إذا كان هذا ملائماً .

على ضوء هذه الملحوظة يتضح أنه ، فيما عدا التغيير من الصورة الأفقية إلى الصورة الرأسية ، فإن فضاء الأعمدة المصفوفة هو نفسه فضاء الصفوف للمصفوفة المحورة . لذلك يمكننا إيجاد أساس لفضاء الأعمدة للمصفوفة A بإيجاد أساس لفضاء الصفوف للمصفوفة A^t ثم العودة بعد ذلك إلى الصورة الرأسية إذا رغبنا .

مثـال (٣٩) :

أوجد أساس فضاء الأعمدة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

بالتحوير نحصل على

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

الاختزال إلى الصورة الصفية المميزة يعطى (تحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن المتجهين $(1, 3, 0)$ و $(0, 1, 2)$ يكونان أساسا لفضاء الصفوف للمصفوفة A^t أوبصورة مكافئة

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad و \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً لفضاء الأعمدة للمصفوفة A .

وتعد النظرية التالية واحدة من أهم النتائج الأساسية فى الجبر الخطى . ونؤجل إثباتها إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ١٢ : إذا كانت A أية مصفوفة فإن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة لهما نفس البعد .

مثـال (٤٠) :

رأينا فى مثال ٣٩ أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

لها فضاء أعمدة ثنائى البعد . وإذن تؤكد نظرية ١٢ أن فضاء الصفوف أيضاً ثنائى البعد . لإثبات أن هذا فى الواقع ما يحدث تختزل A إلى الصورة الصفية المميزة فنحصل على (تحقق من هذا)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة لها صفان غير صفريين ، فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A ثنائى البعد .

تعريف : بعد فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة للمصفوفة A يسمى برتبة A .

مثال (٤١) :

المصفوفة A فى المثالين ٣٩ ، ٤٠ رتبتها ٢ .

تضيف النظرية التالية ثلاث نتائج أخرى إلى تلك الموجودة فى نظرية ١٣ من قسم ١ – ٧ ونظرية ٦ من قسم ٢ – ٣ .

نظرية ١٣ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فان التقارير التالية متكافئة .

(أ) A قابلة للانعكاس .

(ب) النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ له فقط الحل التافه .

(جـ) A تكافىء صفيا I_n .

(د) النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ متوافق لأى مصفوفة $\mathbf{b}$ من النوع $n \times 1$.

(هـ) $\det(A) \neq 0$

(و) A رتبتها n .

(ز) متجهات صفوف A مستقلة خطيا .

(ح) متجهات أعمدة A مستقلة خطيا .

الإثبات : سوف نثبت أن (جـ) ، (و) ، (ز) ، (ح) متكافئة بإثبات التقارير المتتابعة جـ ⇐ و ⇐ ز ⇐ ح ⇐ جـ . وهذا سوف يكمل البرهان حيث أننا نعلم بالفعل أن (جـ) تكافىء (أ) ، (ب) ، (د) ، (هـ) .

جـ ⇐ و : حيث أن A تكافىء صفيا I_n ، وحيث أن I_n لها n صف غير صفرى فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A له n بعد من نظرية 11 . لذلك A رتبتها n .

و ⇐ ز : حيث أن A رتبتها n ، فإن فضاء الصفوف للمصفوفة A له n بعد حيث أن متجهات الصفوف وعددها n للمصفوفة A تنشئ فضاء صفوف A ، فينتج من نظرية ۹ فى قسم ٤ — ٥ أن متجهات صفوف A مستقلة خطيا .

ز ⇐ ح : افرض أن متجهات صفوف A مستقلة خطيا . لهذا يكون فضاء صفوف A له n بعد . من نظرية ۱۲ يكون فضاء أعمدة A أيضاً له n بعد . حيث أن متجهات أعمدة A تنشئ فضاء الأعمدة فإن متجهات أعمدة A مستقلة خطيا من نظرية ۹ فى قسم ٤ — ٥ .

ح ⇐ جـ : افرض أن متجهات أعمدة A مستقلة خطيا . لهذا يكون فضاء أعمدة A له n بعد . ومن ثم يكون فضاء صفوف A له n بعد من نظرية ۱۲ . وهذا يعنى أن الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A بها n من الصفوف غير الصفرية أى أن جميع الصفوف غير صفرية . كما لاحظنا فى مثال ۲٤ من قسم ۲ — ۳ فإن هذا يحتم أن الصورة الصفية المميزة المختزلة للمصفوفة A هى I_n . لذلك فإن A تكافئ صفيا I_n .

من المهم أن نلاحظ أن نظرية ۱۳ تربط معا جميع المواضيع الرئيسية التى درسناها حتى الآن — المصفوفات ، أنظمة المعادلات ، المحددات والفضاءات الخطية .

نختتم هذا القسم بنتيجة إضافية عن أنظمة المعادلات الخطية . اعتبر نظام المعادلات الخطية

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

أو بطريقة مكافئة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

بضرب المصفوفتين فى الطرف الأيسر ، يمكن إعادة كتابة هذا النظام

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أو

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

حيث أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة هو تركيبة خطية من متجهات أعمدة A فينتج أن النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ متوافق إذا وفقط إذا كان $\mathbf{b}$ تركيبة خطية من متجهات أعمدة A لذلك نحصل على النظرية المفيدة التالية .

نظرية ١٤ : نظام المعادلات الخطية $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يكون متوافقا إذا وفقط إذا كان $\mathbf{b}$ فى فضاء أعمدة A .

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ١٠ : افرض أن متجهات صفوف المصفوفة A هى $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ ، . . . ، $\mathbf{r}_m$.

افرض أن B تنتج من A بإجراء عملية بسيطة على الصفوف . سنثبت أن أى متجه فى فضاء صفوف B يكون أيضاً فى فضاء صفوف A ، وبالعكس أى متجه فى فضاء صفوف A يكون فى فضاء صفوف B . يمكننا عندئذ استنتاج أن A ، B لهما نفس فضاء الصفوف .

اعتبر الاحتمالات : إذا كانت عملية الصفوف هى إبدال صفين فان B و A يكون لهما نفس متجهات الصفوف ومن ثم نفس فضاء الصفوف . إذا كانت عملية الصفوف هى ضرب الصف فى عدد قياسى أو جمع مضاعف أحد الصفوف إلى الآخر ، فإن متجهات الصفوف $\mathbf{r}'_1$ ، $\mathbf{r}'_2$ ، . . . ، $\mathbf{r}'_m$ للمصفوفة B تكون تركيبات خطية من $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ ، . . . ، $\mathbf{r}_m$ ولذا تكون فى فضاء صفوف A . حيث أن الفضاء الخطى مغلق بالنسبة إلى الجمع والضرب فى أعداد قياسية ، فإن جميع التركيبات الخطية من $\mathbf{r}'_1$ ، $\mathbf{r}'_2$ ، . . . ، $\mathbf{r}'_m$ ستقع أيضاً فى فضاء صفوف A . لذلك فإن أى متجه فى فضاء صفوف B يكون فى فضاء صفوف A .

حيث أن B نحصل عليها من A بإجراء عملية صفوف ، فإن A يمكن أن نحصل عليها من B باجراء العملية العكسية (قسم ١ – ٧) . لهذا فإن الشرح السابق يثبت أن فضاء صفوف A محتوى فى فضاء صفوف B .

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ١٢ : أرمز لمتجهات صفوف

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بواسطة

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$$

افرض أن فضاء صفوف A من بعد k وأن $S = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ هى أساس لفضاء الصفوف ، حيث $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$. حيث أن S أساس لفضاء الصفوف فإن كل متجه صفوف يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ لذلك

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{1k}\mathbf{b}_k \\
\mathbf{r}_2 &= c_{21}\mathbf{b}_1 + c_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{2k}\mathbf{b}_k \\
&\vdots \\
\mathbf{r}_m &= c_{m1}\mathbf{b}_1 + c_{m2}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{mk}\mathbf{b}_k
\end{aligned} \tag{4.11}$$

حيث أن المتجهين فى R^n يكونان متساويين إذا وفقط إذا كانت المركبات المتناظرة متساوية ، فيمكن مساواة المركبة j من كل طرف من (4 . 11) للحصول على

$$\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1k}b_{kj} \\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2k}b_{kj} \\
&\vdots \\
a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mk}b_{kj}
\end{aligned}$$

أو بطريقة مكافئة

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{kj}\begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة هو متجه العمود j للمصفوفة A و $j = 1, 2, \ldots, n$ اختيارية . لذلك فإن كل متجه أعمدة للمصفوفة A يقع فى الفضاء المنشأ من المتجهات k فى الطرف الأيمن من (4 . 12) لذلك فإن فضاء أعمدة A له بعد $\le k$.

حيث أن

$k =$ بعد (فضاء صفوف A)

فيكون لدينا

بعد (فضاء أعمدة A) $\le$ بعد (فضاء صفوف A) (4.13)

حيث أن المصفوفة A اختيارية تماما ، فإن هذه النتيجة تطبق على A^t .
أى أن

بعد (فضاء أعمدة A^t) $\le$ بعد (فضاء صفوف A^t) . (4.14)

ولكن تحوير المصفوفة يحول الأعمدة إلى صفوف والصفوف إلى أعمدة ، وإذن :

فضاء أعمدة $A^t =$ فضاء صفوف A

وأيضاً

فضاء صفوف A^t = فضاء أعمدة A

لذلك يمكن إعادة كتابة (4.14) على الصورة

بعد (فضاء صفوف A) $\geq$ بعد (فضاء أعمدة A) .

من هذه النتيجة ومن (4.13) نستنتج أن

بعد (فضاء صفوف A) = بعد (فضاء أعمدة A) .

تمارين ٤ — ٦

١ - اكتب متجهات الصفوف ومتجهات الأعمدة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

فى التمارين ٢ - ٥ أوجد : (أ) أساس لفضاء الصفوف ، (ب) أساس لفضاء الأعمدة ، (جـ) رتبة المصفوفة :

٢ - $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ٣ - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ ٤ - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

٥ - $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

٦ - أوجد أساساً للفضاء الجزئى من R^4 المنشأ من المتجهات المعطاة

(أ) $(1, 1, -4, -3), \quad (2, 0, 2, -2), \quad (2, -1, 3, 2)$

(ب) $(-1, 1, -2, 0), \quad (3, 3, 6, 0), \quad (9, 0, 0, 3)$

(جـ) $(1, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 1), \quad (-2, 0, 2, 2), \quad (0, -3, 0, 3)$

٧ - حقق فى كل جزء أن فضاء الصفوف وفضاء الأعمدة لهما نفس البعد (كما هو مؤكد من نظرية ١٢) .

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

٨ - (أ) إذا كانت A مصفوفة من النوع 5×3 ، فما هى أكبر قيمة ممكنة لرتبة A ؟

(ب) إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فما هى أكبر قيمة ممكنة لرتبة A ؟

٩ — فى كل جزء حدد ما إذا كانت $\mathbf{b}$ تقع فى فضاء أعمدة A. وإذا كان ذلك ، عبر عن $\mathbf{b}$ كتركيبة خطية من فضاء الأعمدة :

(أ) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(ب) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(جـ) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

١٠ — (أ) أثبت : إذا كانت A مصفوفة من النوع 5×3 فإن متجهات أعمدة A غير مستقلة خطيا .

(ب) أثبت : إذا كانت A مصفوفة من النوع 3×5 فإن متجهات صفوف A غير مستقلة خطيا .

١١ — أثبت : إذا كانت A مصفوفة غير مربعة فاما متجهات صفوف A أو متجهات أعمدة A تكون غير مستقلة خطيا .

١٢ — اعتبر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

أثبت : A رتبة ٢ إذا و فقط إذا كان واحدا أو أكثر من المحددات

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

لا يساوى صفرا .

١٣ — أثبت أن نظام المعادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ يكون متوافقا إذا وفقط إذا كانت رتبة المصفوفة الممتدة مساوية لرتبة A .

١٤ — أثبت نظرية ١١ .

١٥ — أثبت أن متجهات الصفوف فى مصفوفة A من النوع $n \times n$ وقابلة للانعكاس تكون أساسا للفضاء R^n.

٤ — ٧ الفضاء ذو الضرب الداخلى

فى قسم ٤ — ١ درسنا الضرب الداخلى الأقليدى فى الفضاء الخطى R^n . فى هذا القسم سندخل مفهوم الضرب الداخلى فى فضاء خطى اختيارى . وكنتيجة لعملنا سوف يكون باستطاعتنا تعريف مفاهيم ذات معنى للزاوية والطول والمسافة فى فضاءات خطية أكثر تعميما .

فى نظرية ٢ من قسم ٤ — ١ جمعنا الخواص الأكثر أهمية للضرب الداخلى الإقليدى . فى فضاء خطى عام يعرف الضرب الداخلى فرضيا باستعمال هذه الخواص كفروض .

تعريف : الضرب الداخلى على فضاء خطى V هو دالة تعطى عددا حقيقيا $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ لكل زوج من المتجهات $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ من V بطريقة تجعل الفروض التالية متحققة لجميع المتجهات $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ فى الفضاء V ولجميع الأعداد القياسية k .

١ - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (فرض التماثل)

٢ - $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (فرض التجميع)

٣ - $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (فرض التجانس)

٤ - $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ و $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ (فرض الإيجابية)

إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

يسمى الفضاء الخطى ذو الضرب الداخلى بفضاء ضرب داخلى .

الخواص الإضافية التالية تنتج مباشرة من الفروض الأربعة للضرب الداخلى :

(١) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$

(٢) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

(٣) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

نثبت (٢) ونترك (١) ، (٣) كتمرينين .

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$$ (من التماثل)

$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$$ (من التجميع)

$$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$ (من التماثل)

مثال (٤٢) :

لتكن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. من نظرية ٢ فى قسم ٤ - ١ يحقق الضرب الداخلى الإقليدى $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ جميع فروض الضرب الداخلى .

مثال (٤٣) :

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ، $\mathbf{v} = v_1, v_2)$ متجهين فى R^2 فإن

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

يعرف ضرب داخلى . لإثبات هذا ، لاحظ أولا أنه إذا أبدلنا فى هذه المعادلة $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ فإن الطرف الأيمن يبقى كما هو . وعليه

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

إذا كان $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ فإن

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\end{aligned}$$

وهذا يحقق الفرض الثانى .

وأيضاً

$$\begin{aligned}\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\end{aligned}$$

وهـذا يحقق الفرض الثالث .

أخـيراً

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1{}^2 + 2v_2{}^2$$

وواضح أن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1{}^2 + 2v_2{}^2 \geq 0$ وأن $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1{}^2 + 2v_2{}^2 = 0$ إذا وفقط إذا كان $v_1 = v_2 = 0$ أى إذا وفقط إذا كان $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{0}$. لذلك فإن الفرض الرابع متحقق .

يختلف الضرب الداخلى فى هذا المثال عن الضرب الداخلى الإقليدى فى R^2 ، وهذا يبين أن الفضاء الخطى يمكن أن يكون له أكثر من ضرب داخلى واحد .

مثـال (٤٤) :

إذا كانت

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

أى مصفوفتان من النوع 2×2 فإن الصيغة التالية تعرف ضربا داخليا على M_{22} (حقق ذلك) :

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

فمثلا إذا كان

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = 16$$

مثـال (٤٥) :

إذا كان

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{و} \quad \mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

أى متجهين فى P_2 ، فإن الصيغة التالية تعرف ضربا داخليا على P_2 (حقق ذلك) :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

مثـال (٤٦) :

(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل) .

لتكن $\mathbf{p} = p(x)$ ، $\mathbf{q} = q(x)$ كثيرتى حدود فى P_n ، عرف

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\,dx \tag{4.15}$$

حيث a ، b أى عددين حقيقيين ثابتين بحيث يكون $a < b$. سوف نثبت أن (4.15) تعرف ضرب داخـل على P_n .

(١) $$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\,dx = \int_a^b q(x)p(x)\,dx = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$$

وهذا يثبت أن الفرض ١ يتحقق .

(٢) $$\begin{aligned}\langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{s} \rangle &= \int_a^b (p(x) + q(x))s(x)\,dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b q(x)s(x)\,dx \\ &= \langle \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{s} \rangle\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن الفرض ٢ يتحقق .

(٣) $$\langle k\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_a^b kp(x)q(x)\,dx = k\int_a^b p(x)q(x)\,dx = k\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

وهذا يثبت أن الفرض ٣ يتحقق .

(٤) إذا كانت $\mathbf{p} = p(x)$ أية كثيرة حدود فى P_n فإن $p^2(x) \geq 0$ لجميع x ، وإذن :

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \int_a^b p^2(x)\,dx \geq 0$$

وحيث أن $p^2(x) \geq 0$ وأن كثيرات الحدود دوال متصلة فإن $\int_a^b p^2(x)\,dx = 0$ إذا وفقط إذا كانت $p(x) = 0$ لجميع x التى تحقق $a \leq x \leq b$. لذلك فإن $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \int_a^b p^2(x)\,dx = 0$ إذا وفقط إذا كانت $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. هذا يحقق الفرض ٤ .

نلاحظ أن الشرح المعطى هنا يمكن أيضاً استخدامه لإثبات أن الفضاء الحلى $C[a, b]$ الذى ناقشناه فى مثال ١٤ هو فضاء ضرب داخلى بالنسبة إلى الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين فى R^3 فإن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$ حيث θ هى الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ (قسم ٣ — ٣) . إذا أخذنا مربع كل من طرفى هذه المتساوية واستخدمنا العلاقتين $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u},\ \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ و $\cos^2\theta \le 1$ نحصل على المتباينة

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \le (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

تبين لنا النظرية التالية أن هذه المتباينة يمكن أن تعمم إلى أى فضاء ضرب داخلى . وسوف تمكننا المتباينة الناتجة ، والتى تسمى متباينة كوشى — شوارتز ، من إدخال مفهومى الطول والزاوية فى أى فضاء ضرب داخلى .

نظرية ١٥ : (متباينة كوشى — شوارتز*) إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين فى فضاء ضرب داخلى V فإن

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$$

الإثبات : ننبه القارئ مقدما أن الإثبات المقدم هنا يعتمد على حيلة ماهرة ولكنها بلا دافع . إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ فإن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$. فالمتطابقة تتحقق بوضوح . افرض الآن أن $\mathbf{u} \ne \mathbf{0}$. لتكن $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$ ، $b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ ، $c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ وليكن t أى عدد حقيقى . من فرض الإيجابية يكون الضرب الداخلى لأى متجه مع نفسه دائما غير سالب لذلك :

$$\begin{aligned} 0 \le \langle (t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\mathbf{u} + \mathbf{v})\rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

تحتم هذه المتباينة أن كثيرة الحدود التربيعية $at^2 + bt + c$ يكون لها جذران غير حقيقيين أو جذر حقيقى مكرر . لذلك يجب أن يحقق مميزها أن $b^2 - 4ac \le 0$. التعبير عن a ، b ، c بدلالة $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يعطى $4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \le 0$ أو بصيغة مكافئة $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 \le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$

مثال (٤٧) :

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, {}_2v, \ldots, v_n)$ أى متجهين فى R^n ، فإن تطبيق متباينة كوشى — شوارتز على $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يعطى

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \le (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

وهى ما تسمى بمتباينة كوشى .

---

* أوجستين لويس (بارون) كوشى (١٧٨٩ — ١٨٥٧) يسمى أحيانا بأب التحليل الحديث اذ ساعد فى وضع حساب التفاضل والتكامل على أسس راسخة .
هيرمان أماندوس شوارتز (١٨٤٣ — ١٩٢١) . رياضى ألمانى .

تمارين ٤ — ٧

١ – احسب $\langle u, v\rangle$ باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٣ .

(أ) $u = (2, -1), v = (-1, 3)$ (ب) $u = (0, 0), v = (7, 2)$

(جـ) $u = (3, 1), v = (-2, 9)$ (د) $u = (4, 6), v = (4, 6)$

٢ – كرر تمرين ١ باستخدام الضرب الداخلى الإقليدى على R^2 .

٣ – احسب $\langle u, v\rangle$ باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٤ .

(أ) $v = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (ب) $v = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

٤ – احسب $\langle p, q\rangle$ باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٥ .

(أ) $q = 2 - 4x^2$ $p = -1 + 2x + x^2$

(ب) $q = 2 + 4x - 2x^2$ $p = -3 + 2x + x^2$

٥ – ليكن $u = (u_1, u_2)$ ، $v = (v_1, v_2)$. أثبت أن ما يلى هو ضرب داخلى على R^2 .

(أ) $\langle u, v\rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$

(ب) $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

٦ – ليكن $u = (u_1, u_2, u_3)$ ، $v = (v_1, v_2, v_3)$. حدد أيا مما يلى يكون ضربا داخليا على R^3 .
فى الحالات التى لا يكون فيها الضرب داخليا اذكر الفروض التى لا تتحقق .

(أ) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ (ب) $\langle u, v\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

(جـ) $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$ (د) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

٧ – ليكن $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$

أثبت أن $\langle U, V\rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ ضرب داخلى على M_{22} .

٨ – لتكن $p = p(x)$ ، $q = q(x)$ كثيرتى حدود من P_2 . أثبت أن

$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1)$ ضرب داخلى على P_2 .

٩ – حقق متباينة كوشى – شوارتز لكل من

(أ) $u = (2, 1)$ ، $v = (1, -3)$ باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٣

(ب) $u = (2, 1, 5)$ ، $v = (1, -3, 4)$ باستخدام الضرب الداخلى الإقليدى

(جـ) $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ و $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٤

(د) $p = -1 + 2x + x^2$ ، $q = 2 - 4x^2$ باستخدام الضرب الداخلى فى مثال ٤٥ .

١٠ – اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الإقليدي . طبق متباينة كوشي – شوارتز على المتجهين $\mathbf{u}(a, b)$ ، $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ لإثبات أن $|a\cos\theta + b\sin\theta|^2 \leq a^2 + b^2$.

١١ – أثبت أنه إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ أي ضرب داخلي ، فإن $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$.

١٢ – أثبت أنه إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ أي ضرب داخلي و k أي عدد قياسي ، فان $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

١٣ – أثبت أنه في متباينة كوشي – شوارتز يتحقق التساوي إذا و فقط إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ غير مستقلين خطيا .

١٤ – لتكن c_1 ، c_2 ، c_3 أعدادا حقيقية موجبة و ليكن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
أثبت أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2 + c_3u_3v_3$ هو ضرب داخلي على R^3 .

١٥ – لتكن c_1 ، c_2 ، . . . ، c_n أعدادا حقيقية موجبة و ليكن $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ أثبت أن $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2 + \cdots + c_nu_nv_n$ هو ضرب داخلي على R_n .

١٦ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) استخدم الضرب الداخل

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

لحساب $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ للمتجهين $\mathbf{p} = p(x)$ ، $\mathbf{q} = q(x)$ في P_3 :

(أ) $\mathbf{q} = x - 3x^2$ $\qquad$ $\mathbf{p} = 1 - x + x^2 + 5x^3$

(ب) $\mathbf{q} = 2 + 8x^2$ $\qquad$ $\mathbf{p} = x - 5x^3$

١٧ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) استخدم الضرب الداخل

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

في حساب $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ للمتجهين $\mathbf{f} = f(x)$ ، $\mathbf{g} = g(x)$ في $C[0, 1]$:

(أ) $\mathbf{g} = \sin 2\pi x$ $\qquad$ $\mathbf{f} = \cos 2\pi x$

(ب) $\mathbf{g} = e^x$ $\qquad$ $\mathbf{f} = x$

(جـ) $\mathbf{g} = 1$ $\qquad$ $\mathbf{f} = \tan \frac{\pi}{4} x$

١٨ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين على $[0, 1]$. أثبت :

(أ)
$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]$$

(ب)
$$\left[\int_0^1 [f(x) + g(x)]^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_0^1 f^2(x)\,dx\right]^{1/2} + \left[\int_0^1 g^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

(ارشاد : استخدم متباينة كوشي – شوارتز والضرب الداخلي في مثال ١٧) .

٤ ــ ٨ الطول والزاوية فى الفضاءات ذات الضرب الداخلى

نستخدم فى هذا القسم متباينة كوشى – شوارتز لتطوير مفاهيم الطول والمسافة والزاوية فى الفضاءات العامة ذات الضرب الداخلى .

تعريف : إذا كان V فضاء ضرب داخلى فإن معيار (أو طول) متجه $\mathbf{u}$ يرمز له بالرمز $\|\mathbf{u}\|$ ويعرف بواسطة

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$$

والمسافة بين نقطتين (متجهين) $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ يرمز لها بالرمز $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ وتعرف بواسطة

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

مثـال (٤٨) :

إذا كان $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ متجهين فى R^n مع الضرب الداخلى الإقليدى فإن

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

وأيضاً

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2}$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

لاحظ أن هذين هما بالضبط صيغتا المعيار الإقليدى والمسافة الأقليدية اللتين نوقشتا فى قسم ٤ – ١ .

مثـال (٤٩) :

نفرض أن R^2 له الضرب الداخلى $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ الذى نوقش فى مثال ٤٣ .
إذا كان $\mathbf{u} = (1, 0)$ ، $\mathbf{v} = (0, 1)$ فإن

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

وأيضاً

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle^{1/2}$$
$$= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5}$$

من المهم أن نحفظ فى ذاكرتنا أن المعيار والمسافة يعتمدان على الضرب الداخلى المستخدم . إذا تغير الضرب الداخلى فإن المعيارات والمسافات بين المتجهات تتغير . فمثلا إذا كان R^2 له الضرب الداخلى الإقليدى فإن معيار المتجه $\mathbf{u}$ فى المثال السابق هو 1 ، والمسافة بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ هى $\sqrt{2}$.

قد يعترض القارئ هنا على استخدامنا لمصطلحي الطول والمسافة للكميتين $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$ ، $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ ، بالرغم من أن هاتين الصيغتين المعرفتين للطول والمسافة قد نشأتا بتقليد الصيغتين فى R^2 ، R^3 ، فإن النتائج الغريبة التى حصلنا عليها فى مثال ٤٩ تلقى بعض الشك على الحكمة فى هذين التعريفين . لأن الأمر يتطلب خيالا واسعا حتى نقر أن طول المتجه $u = (1, 0)$ هو $\sqrt{3}$ ونعطى الآن بعض الحجج لتأييد هذين التعريفين .

خلال أعوام كثيرة قرر الرياضيون ما يمكن اعتباره بالخواص الأكثر أهمية للطول والبعد الإقليدى فى R^2 ، R^3 وهذه الخواص مذكورة فى شكل ٤ — ٨ .

الخواص الأساسية للطول	الخواص الأساسية للمسافة
ط ١ $\|\mathbf{u}\| \geq 0$	م ١ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
ط ٢ $\|\mathbf{u}\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{0}$	م ٢ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
ط ٣ $\|k\mathbf{u}\| = \|k\| \, \|\mathbf{u}\|$	م ٣ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
ط ٤ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (متباينة المثلث)	م ٤ $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (متباينة المثلث)

(شكل ٤ — ٨)

تبرر النظرية التالية تعريفى المعيار والمسافة فى فضاء ضرب داخلى .

نظرية ١٦ : إذا كان V فضاء ضرب داخلى ، فإن المعيار $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$ والمسافة $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ يحققان جميع الخواص المذكورة فى شكل ٤ — ٨

نثبت الخاصية ط ٤ ونترك إثباتات بقية الأجزاء كتمرينات . قبل البدء فى الإثبات نلاحظ أن متباينة كوشى شوارتز .

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

يمكن كتابتها فى صور بديلة . حيث أن $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ ، $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ فيمكن كتابتها بالصيغة

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (4.16)$$

أو بعد أخذ الجذر التربيعى بالصيغة

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \qquad (4.17)$$

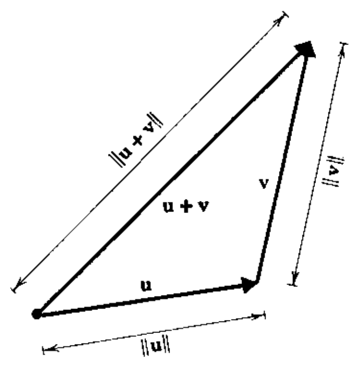
إثبات الخاصية ط ٤ : من التعريف

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &\le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &\le \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \qquad \text{(by 4.17)} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.\end{aligned}$$

أخذ الجذر التربيعى يعطى

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \blacksquare$$

فى R^2 ، R^3 تنص النتيجة التى برهنت الآن على الحقيقة الهندسية المعروفة أن مجموع طولى ضلعين من المثلث على الأقل يساوى طول الضلع الثالث (شكل ٤ – ٩) .



(شكل ٤ – ٩)

افرض أن u ، v متجهين غير صفريين فى فضاء ضرب داخلى V. يمكن إعادة كتابة متباينة كوشى – شوارتز كما هى معطاة فى (4.16) على الصورة

$$\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)^2 \le 1$$

أو بصيغة مكافئة

$$-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

ونتيجة لهذه الحقيقة ، توجد زاوية وحيدة θ بحيث يكون

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad (4.18)$$

نعرف θ بأنها الزاوية بين المتجهين u ، v لاحظ أنه فى R^2 أو R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى ، تتفق (4.18) مع الصيغة العادية لجيب تمام الزاوية بين متجهين غير صفريين (قسم ٣ – ٣ من الباب الثالث) .

مثـال (٥٠) :

أوجد جيب تمام الزاوية θ بين المتجهين

$$\mathbf{u} = (4, 3, 1, -2) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (-2, 1, 2, 3)$$

حيث الفضاء الخطى هو R^4 مع الضرب الداخلى الإقليدى

الحـل :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30} \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18} \qquad \text{و} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

إذا

$$\cos\theta = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{\sqrt{30}\sqrt{2}}$$

مثـال (٥١) :

إذا كان M_{22} له الضرب الداخلى المعطى فى مثال ٤٤ ، فإن الزاوية بين المصفوفتين

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هى $\pi/2$ لأن

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{\|U\|\,\|V\|} = \frac{1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0)}{\|U\|\,\|V\|} = 0$$

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين بحيث يكون $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ فإنه ينتج من(4. 18) أن $\cos\theta = 0$ وأن $\theta = \pi/2$. وهذا يجعلنا نقترح المصطلح التالى .

تعريف : فى فضاء ضرب داخلى ، يسمى المتجهان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، **متعامدين** إذا كان $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
علاوة على هذا ، إذا كان $\mathbf{u}$ عموديا على كل متجه فى فئة W ، فإننا نقول أن $\mathbf{u}$ **عمودى على** W .

ونؤكد على أن التعامد يعتمد على اختيار الضرب الداخلى . يمكن لمتجهين أن يكونا متعامدين بالنسبة إلى ضرب داخلى معين ولكن ليس بالنسبة إلى آخر .

مثـال (٥٢) :

(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .)

لتكن P_2 لها الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

الذى نوقش فى مثال ٤٦ . وليكن

$$\mathbf{p} = x, \qquad \mathbf{q} = x^2$$

فيكون

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xx\, dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2\, dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4\, dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} xx^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

لأن $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$ فإن المتجهين $\mathbf{p} = x$ ، $\mathbf{q} = x^2$ يكونان متعامدين بالنسبة إلى الضرب الداخلى المعطى .

نختتم هذا القسم بتعميم هام ومفيد لحقيقة معروفة .

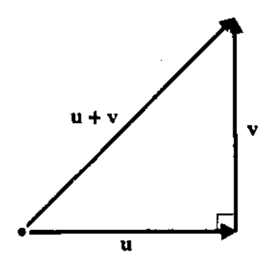
نظرية ١٧ : (تعميم نظرية فيثاغورث) . إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين متعامدين فى فضاء ضرب داخلى فإن

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

الإثبات :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

لاحظ أنه فى R^2 أو R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى تختزل هذه النظرية إلى نظرية فيثاغورث العادية (شكل ٤ - ١٠) .



(شكل ٤ - ١٠)

تمارين ٤ — ٨

١ - ليكن R^2 له الضرب الداخلى $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ حيث $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. أوجد $\|\mathbf{w}\|$ عندما

(أ) $\mathbf{w} = (-1, 3)$ (ب) $\mathbf{w} = (6, 7)$ (جـ) $\mathbf{w} = (0, 1)$ (د) $\mathbf{w} = (0, 0)$

٢ – كرر تمرين ١ باستخدام الضرب الداخلى الإقليدى فى R^2 .

٣ – ليكن P_2 له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أوجد $\|\mathbf{p}\|$ عندما

(أ) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$ (ب) $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

٤ – ليكن M_{22} له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد $\|A\|$ عندما

(أ) $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

٥ – ليكن R^2 له الضرب الداخ٣ الموجود فى تمرين ١ . أوجد $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ عندما

(أ) $\mathbf{x} = (-1, 2), \mathbf{y} = (2, 5)$ (ب) $\mathbf{x} = (3, 9), \mathbf{y} = (3, 9)$

٦ – كرر تمرين ٥ باستخدام الضرب الداخلى الاقليدى فى R^2.

٧ – ليكن P_2 له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أوجد $d(\mathbf{p},\mathbf{q})$ عندما

$\mathbf{p} = 2 - x + x^2, \quad \mathbf{q} = 1 + 5x^2$

٨ – ليكن M_{22} له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد $d(A, B)$ عندما

(أ) $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

(ب) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

٩ – لتكن R^2 ، R^3 ، R^4 لها الضرب الداخلى الإقليدى . فى كل جزء أوجد جيب تمام الزاوية بين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$.

(أ) $\mathbf{u} = (1, -3), \mathbf{v} = (2, 4)$ (ب) $\mathbf{u} = (-1, 0), \mathbf{v} = (3, 8)$

(جـ) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2), \mathbf{v} = (2, 4, -9)$ (د) $\mathbf{u} = (4, 1, 8), \mathbf{v} = (1, 0, -3)$

(هـ) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$ (و) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1), \mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

١٠ – ليكن P_2 له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أوجد جيب تمام الزاوية بين $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{q}$.

(أ) $\mathbf{q} = 2 + 4x - 9x^2 \quad \mathbf{p} = -1 + 5x + 2x^2$

(ب) $\mathbf{q} = 7 + 3x + 3x^2 \quad \mathbf{p} = x - x^2$

١١ – ليكن M_{22} له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٤ . أوجد جيب تمام الزاوية بين A ، B

(أ) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(ب) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

١٢ – ليكن R^3 له الضرب الداخلى الإقليدى . لأى من قيم k يكون $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متعامدين ؟

(أ) $\mathbf{v} = (1, 7, k)$ $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$

(ب) $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$ $\mathbf{u} = (k, k, 1)$

١٣ – ليكن P_2 له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أثبت أن $\mathbf{p} = 1 - x + 2x^2$ و $\mathbf{q} = 2x + x^2$ متعامدان .

١٤ – ليكن M_{22} له الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٤ . حدد أيا مما يلى يكون عموديا على

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

١٥ – ليكن R^4 له الضرب الداخلى الإقليدى . أوجد متجهين لهما المعيار 1 ويكونان عموديين على كل المتجهات $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0), \mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2), \mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

١٦ – ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان $\mathbf{w}$ عموديا على كل من $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ فإنه يكون عموديا على $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2$ لأى عددين قياسيين k_1 ، k_2 . فسر هذه النتيجة هندسيا فى R^3 بالنسبة إلى الضرب الداخلى الإقليدى .

١٧ – ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان $\mathbf{w}$ عموديا على كل من المتجهات $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ ، . . . ، $\mathbf{u}_r$ فإنه يكون عموديا على أى متجه فى $\text{lin}\ \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$.

١٨ – ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت أنه إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين متعامدين فى V بحيث يكون $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ فإن $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

١٩ – ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت المتساوية

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

للمتجهات فى V .

٢٠ – ليكن V فضاء ضرب داخلى . أثبت المتساوية :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

للمتجهات فى V .

٢١ – ليكن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ أساساً لفضاء ضرب داخلى . أثبت أن المتجه الصفرى هو المتجه الوحيد العمودى على كل متجهات الأساس .

٢٢ – ليكن $\mathbf{v}$ متجها فى فضاء ضرب داخلى V .

(أ) أثبت أن فئة جميع المتجهات فى V العمودية على $\mathbf{v}$ تكون فضاء جزئيا فى V .

(ب) صف هذا الفضاء الجزئى هندسيا فى R^2 ، R^3 مع الضرب الداخلى الأقليدى .

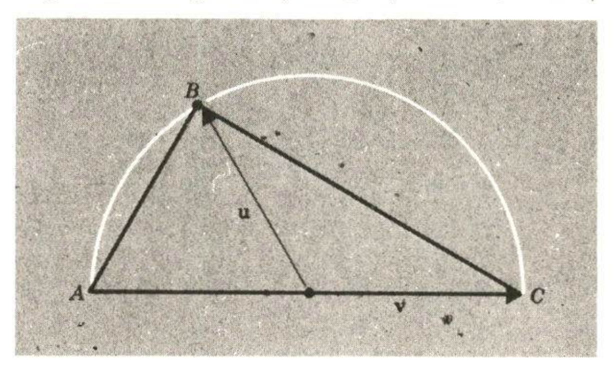
٢٣ – أثبت التعميم التالى لنظرية ١٧ . إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ متجهات متعامدة مثنى مثنى فى فضاء ضرب داخلى V فإن

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

٢٤ – أثبت الأجزاء التالية من نظرية ١٦ .

(أ) الجزء ط ١ (ب) الجزء ط ٢ (جـ) الجزء ط ٣ (د) الجزء م ١
(هـ) الجزء م ٢ (و) الجزء م ٣ (ز) الجزء م ٤

٢٥ – استخدم طرق المتجهات لإثبات أن المثلث المرسوم داخل دائرة وأحد أضلاعه هو قطر الدائرة يجب أن يكون قائم الزاوية (**ارشاد** : عبر عن المتجهين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ فى الشكل التالى بدلالة $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$) .



٢٦ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .) ليكن $C[0, \pi]$ له الضرب الداخلى .

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$$

ولتكن $\mathbf{f}_n = \cos nx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. أثبت أنه إذا كان $k \neq l$ فإن $\mathbf{f}_k$ ، $\mathbf{f}_l$ متعامدان بالنسبة إلى الضرب الداخلى المعطى .

٤ – ٩ الأساسات العيارية المتعامدة – عملية جرام – شميدت

فى كثير من المسائل المتعلقة بالفضاءات الخطية يكون اختيار أساس للفضاء متروكا لحرية من يقوم بحل المسألة . ومن الطبيعى أن أفضل استراتيجية هو اختيار الأساس بحيث يبسط حل المسألة المعروضة . فى فضاءات الضرب الداخلى ، تكون الحالة غالبا أن أفضل اختيار هو الأساس الذى فيه جميع المتجهات متعامدة كل على الآخر . سنبين فى هذا القسم كيف يمكن بناء مثل هذا الأساس .

تعريف : تسمى فئة متجهات فى فضاء ضرب داخلى **بفئه متعامدة** إذا كان أى متجهين معينين فى الفئة متعامدين . الفئة المتعامدة التى فيها كل متجه معياره 1 تسمى **الفئة العيارية المتعامدة** .

مثـال (٥٣) :

ليكن

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الفئة $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ هى عيارية متعامدة إذا كان R^3 له الضرب الداخلى الإقليدى ، إذ أن

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$$

وأيضاً

$$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

مثـال (٥٤) :

إذا كان $\mathbf{v}$ متجها غير صفرى فى فضاء ضرب داخلى ، فمن الخاصية ط٣ فى شكل ٤ – ٨ يكون المتجه

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

له المعيار 1 إذ أن

$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

هذه العملية لضرب متجه غير صفرى $\mathbf{v}$ فى مقلوب طوله للحصول على متجه معياره 1 تسمى **بجعل $\mathbf{v}$ عيارى** .

أهمية إيجاد أساس عيارى متعامد لفضاءات الضرب الخطى تظهر جزئيا من النظرية التالية التى تبين أنه من البساطة بدرجة غير عادية أن نعبر عن متجه بدلالة أساس عيارى متعامد .

نظرية ١٨ : إذا كان $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخلى V وكان $\mathbf{u}$ أى متجه فى V ، فإن

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

الإثبـات : حيث أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ هو أساس ، فإن المتجه $\mathbf{u}$ يمكن أن يعبر عنه بالصيغة .

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

سيكمل الإثبات ببيان أن $k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ ، لكل متجه $\mathbf{v}_i$ فى S يكون

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle\end{aligned}$$

حيث أن $S\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ فئة عيارية متعامدة ، يكون

$$\text{if } j \neq i \qquad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \qquad \text{و} \qquad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1,$$

لذلك تبسط المعادلة السابقة إلى

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = k_i \quad ∎$$

مثال (٥٥) :

ليكن

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), \quad \mathbf{v}_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})$$

من السهل التأكد بأن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ هو أساس عيارى متعامد فى R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى . عبر عن المتجه $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ كتركيبة خطية من المتجهات فى S .

الحل :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \tfrac{7}{5} \qquad \text{و} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = -\tfrac{1}{5} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = 1$$

إذا من نظرية ١٨

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 + \tfrac{7}{5}\mathbf{v}_3$$

أى أن

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \tfrac{1}{5}(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}) + \tfrac{7}{5}(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})$$

فائدة نظرية ١٨ يجب أن تكون واضحة من هذا المثال إذا تذكرنا أنه للاساس غير العيارى المتعامد يكون من الضرورى حل نظام من المعادلات لكى نعبر عن المتجه بدلالة الأساس .

نظرية ١٩ : إذا كانت $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ فئة متعامدة من المتجهات غير الصفرية فى فضاء ضرب داخلى ، فإن S تكون مستقلة خطيا .

الإثبات : افرض أن

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4.19}$$

لكى نبين أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ مستقلة خطيا، يجب أن نثبت أن $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.
ينتج من (4.19) أنه لكل $\mathbf{v}_i$ من S

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

أو بصيغة مكافئة

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

من تعامد متجهات S ، $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j > = 0$ عندما $i \neq j$ لذلك تختزل هذه المعادلة إلى

$$k_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

حيث أنه من المفترض أن المتجهات فى S غير صفرية ، فإن $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle \neq 0$ من فرض الإيجابية للضرب الداخلى . إذ $k_i = 0$. حيث أن الدليل i اختيارى ، فيكون $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.
لهذا تكون S مستقلة خطياً .

مثال (٥٦) :

فى مثال ٥٣ أثبتنا أن

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) \ , \ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ و \ \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

تكون فئة عيارية متعامدة بالنسبة إلى الضرب الداخلى الاقليدى فى R^3 . من نظرية ١٩ تكون هذه المتجهات فئة مستقلة خطيا . لهذا حيث أن R^3 ثلاثى الأبعاد فإن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ تكون أساساً عياريا متعامدا للفضاء R^3 .

نتجه الآن إلى مسألة بناء أساس عيارى متعامد لفضاء ضرب داخلى . يناقش إثبات النتيجة التمهيدية التالية فى التمارين بنهاية هذا القسم .

نظرية ٢٠ : اعتبر V فضاء ضرب داخلى و $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ فئة عيارية متعامدة من المتجهات فى V . إذا كان W يدل على الفضاء المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ ، فإن أى متجه $\mathbf{u}$ فى V يمكن التعبير عنه بالصيغة .

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

حيث $\mathbf{w}_1$ فى W و $\mathbf{w}_2$ عمودى على W وذلك بأخذ

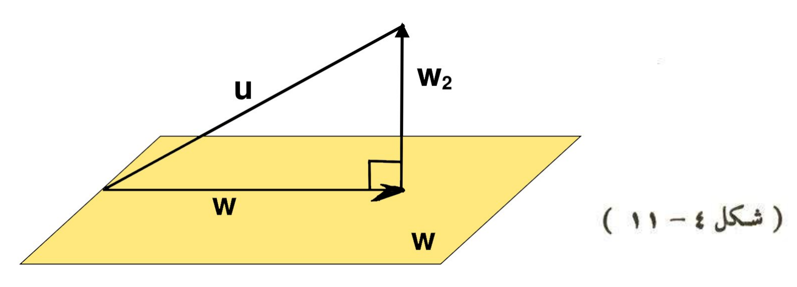
$$\mathbf{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r\rangle\mathbf{v}_r \qquad (4.20)$$

وأيضاً

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 - \cdots - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r\rangle\mathbf{v}_r \qquad (4.21)$$

(أنظر شكل ٤ — ١١ للتوضيح فى R^3 .)

بايعاز من شكل ٤ — ١١ سنسمى $\mathbf{w}_1$ **المسقط العمودى للمتجه $\mathbf{u}$ على W** ونرمز له بالرمز $\text{proj}_W \mathbf{u}$. ويسمى المتجه $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$ **بمركبة $\mathbf{u}$ العمودية على W** .



(شكل ٤ — ١١)

مثال (٥٧) :

اعتبر R^3 له الضرب الداخلى الإقليدى واعتبر W هو الفضاء الجزئى المنشأ من المتجهين العياريين المتعامدين $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ و $\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. المسقط العمودى للمتجه $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ على W هو

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (1)(0, 1, 0) + (-\tfrac{1}{5})(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}) \\ &= (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}) \end{aligned}$$

مركبة $\mathbf{u}$ العمودية على W هى

$$\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u} = (1, 1, 1) - (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}) = (\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25})$$

لاحظ أن $\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$ عمودى على كل من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ولذلك فإن هذا المتجه يكون عموديا على أى متجه فى الفضاء W المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ كما يجب أن يكون .

نحن الآن على استعداد لإثبات النتيجة الرئيسية لهذا القسم .

نظرية ٢١ : كل فضاء ضرب داخلى غير صفرى ذو بعد منتهى له أساس عيارى متعامد .

الإثبات : اعتبر V أى فضاء ضرب داخلى غير صفرى من بعد n واعتبر أن $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ أى أساس للفضاء V . ستنتج المتتابعة التالية من الخطوات أساسا عياريا متعامدا $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ للفضاء V.

الخطوة ١ – ليكن $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|$. المتجه $\mathbf{v}_1$ معياره 1 .

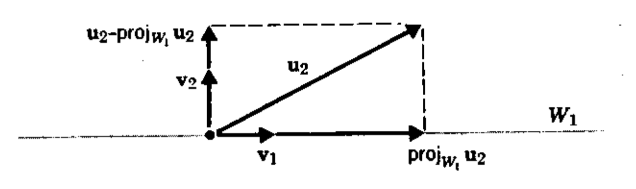
الخطوة ٢ – لبناء متجه $\mathbf{v}_2$ معياره 1 ويكون عموديا على $\mathbf{v}_1$ فإننا نحسب مركبة $\mathbf{u}_2$ العمودية على الفضاء W_1 المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ثم نجعل معياره الوحدة . أى أن

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2\|} = \frac{\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1\|}$$

(شكل ٤ – ١٢) . بالطبع إذا كان $\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = 0$ ، فلا يمكننا أن نجرى عملية جعل المعيار الوحدة . ولكن هذا لا يمكن حدوثه ، وإلا كان لدينا

$$\mathbf{u}_2 = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1$$

الذى ينص على أن $\mathbf{u}_2$ مضاعف للمتجه $\mathbf{u}_1$ ، وهو ما يتناقض مع الاستقلال الخطى للأساس $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

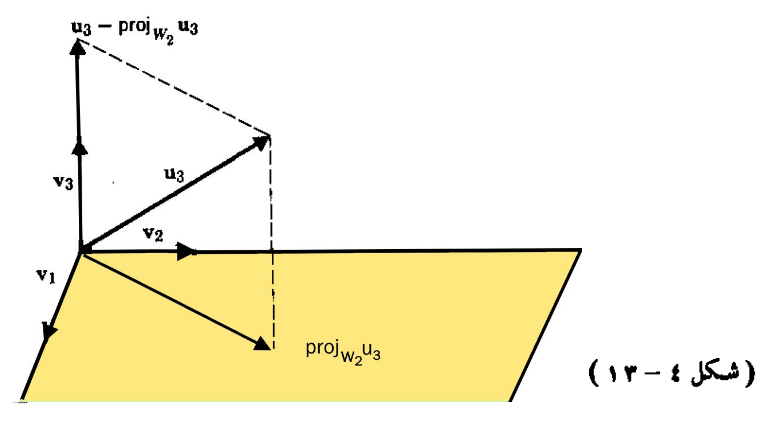


(شكل ٤ – ١٢)

الخطوة ٣ . لبناء متجه $\mathbf{v}_3$ معياره 1 ويكون عموديا على كل من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ فإننا نحسب مركبة $\mathbf{u}_3$ العمودية على الفضاء W_2 المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ثم نجعل معياره الوحدة (شكل ٤ — ١٣) أى أن

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3\|} = \frac{\mathbf{u}_3 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_3 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2\|}$$

كما فى الخطوة ٢ فإن الاستقلال الخطى للأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ يضمن أن



(شكل ٤ — ١٣)

$\mathbf{u}_3 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 \neq 0$ لذلك فإن عملية جعل المعيار يساوى الوحدة يمكن دائما إجراؤها .

نترك التفصيلات كتمرين .

خطوة ٤ — لتحديد متجه $\mathbf{v}_4$ معياره 1 ويكون عموديا على $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ فإننا نحسب مركبة $\mathbf{u}_4$ العمودية على الفضاء W_3 المنشأ من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ ثم نجعل معياره الوحدة . فيكون

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\mathbf{u}_4 - \text{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4 - \text{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4\|} = \frac{\mathbf{u}_4 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3\rangle\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{u}_4 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v}_1 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2\rangle\mathbf{v}_2 - \langle\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3\rangle\mathbf{v}_3\|}$$

بالاستمرار على هذا المنوال سنحصل على فئة عيارية متعامدة من المتجهات $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ حيث أن V من n بعدا وأن كل فئة عيارية متعامدة تكون مستقلة خطيا فإن الفئة $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ تكون أساساً عياريا متعامدا للفضاء V .

تسمى عملية البناء خطوة بخطوة السابقة لتحويل أى أساس اختيارى إلى أساس عيارى متعامد بعملية جرام — شميدت * .

---

* يورجين بيدرسن جرام (١٨٥٠ — ١٩١٦) . اكتوارى دانماركى .
ايرهارد شميدت (١٨٧٦ — ١٩٥٩) رياضى المانى.

مثال (٥٨) :

اعتبر الفضاء الخطى R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى . طبق عملية جرام شميدت لتحويل الأساس $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ إلى أساس عيارى متعامد .

الحل :

الخطوة ١ :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

الخطوة ٢ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 \\ &= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

إذا

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \mathbf{u}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

الخطوة ٣ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

إذا

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3 - \text{proj}_{W_2} \mathbf{u}_3\|} = \sqrt{2}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

لهذا فإن

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

تكون أساسا عياريا متعامدا للفضاء R^3 .

النتائج التالية لعملية جرام – شميدت لها العديد من التطبيقات ، البعض منها قد نوقش فى قسم ٧ – ٢ . سيكون عند القارئ الخلفية لقراءة هذه التطبيقات بعد إكمال هذا القسم الاختيارى .

نظرية ٢٢ : (نظرية الإسقاط) . إذا كان W فضاءاً جزئيا من بعد منتهى لفضاء ضرب داخل V فإن كل متجه $\mathbf{u}$ فى V يمكن التعبير عنه بطريقة واحدة على الصورة

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

حيث $\mathbf{w}_1$ يكون من W و $\mathbf{w}_2$ يكون عموديا على W .

الإثبات : للإثبات جزءان . أولا يجب أن نوجد متجهين $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ بالخواص المذكورة وبعد ذلك يجب أن نثبت أنهما المتجهان الوحيدان بهذه الصفة .

بواسطة عملية جرام – شميدت يوجد أساس عيارى متعامد $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ للفضاء W . أى أن $W = \text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. وإذن من نظرية ٢٠ سيكون للمتجهين

$$\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W \mathbf{u} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$$

الخواص المذكورة فى هذه النظرية . لإثبات أن هذين هما المتجهان الوحيدان بهذه الخواص . نفرض أنه يمكننا أيضاً كتابة

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 \tag{4.22}$$

حيث $\mathbf{w}'_1$ يكون من W ، $\mathbf{w}'_2$ يكون عموديا على W . إذا طرحنا من (4.22) المعادلة

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

نحصل على

$$0 = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2)$$

أو

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \tag{4.23}$$

حيث أن $\mathbf{w}_2$ ، $\mathbf{w}'_2$ عموديان على W فإن الفرق بينهما يكون أيضاً عموديا على W ، حيث أنه يمكننا لأى متجه $\mathbf{w}$ فى W أن نكتب

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}'_2 \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 - 0 = 0$$

ولكن $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$ هو ذاته متجه فى W حيث أنه من (4.23) الفرق بين متجهين فى الفضاء الجزئى W . لهذا فإن $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$ يجب أن يكون عموديا على نفسه ، أى أن

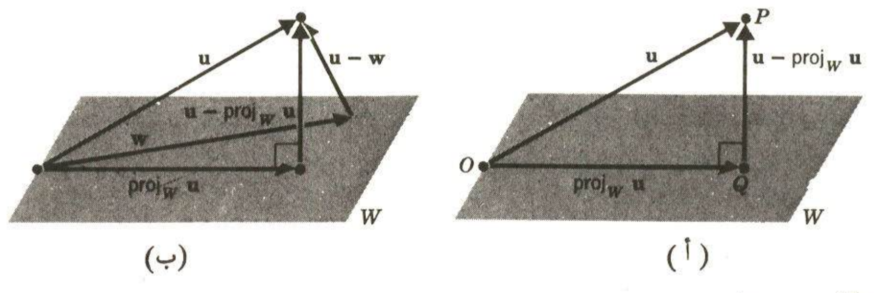
$$\langle \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

ولكن هذا يحتم أن $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ من الفرض ٤ للضرب الداخلى . وعليه فإن $\mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}_2$ ومن (4.23) يكون $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$.

إذا كانت P نقطة فى فضاء ثلاثى عادى وكان W مستويا مارا بنقطة الأصل ، فنحصل على النقطة Q من W الأقرب إلى P باسقاط عمود من P على W (شكل ٤ - ١٤ أ) . لهذا إذا افترضنا $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ ، فإن المسافة بين P و W تعطى بواسطة

$$\|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|$$

وبعبارة أخرى ، من بين جميع المتجهات $\mathbf{w}$ فى W ، فإن المتجه $\mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{u}$ يجعل المسافة $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$ أصغر ما يمكن (شكل ٤ - ١٤ ب) .



(شكل ٤ - ١٤)

توجد طريقة أخرى للتفكير فى هذه الفكرة . أنظر إلى $\mathbf{u}$ كمتجه ثابت نود أن نقربه بمتجه من W . أى تقريب $\mathbf{w}$ سينتج عنه « متجه الخطأ »

$$\mathbf{u} - \mathbf{w}$$

الذى لا يمكن جعله مساويا للمتجه الصفرى ، إلا إذا كان $\mathbf{u}$ فى W ولكن باختيار

$$\mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{u}$$

يمكننا جعل طول متجه الخطأ

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|$$

صغير قدر الإمكان . لهذا يمكننا وصف $\text{proj}_W \mathbf{u}$ بأنه « التقريب الأمثل » للمتجه $\mathbf{u}$ بمتجهات من W . ستجعل النظرية التالية هذه الأفكار البديهية أكثر انضباطا .

نظرية ٢٣ : (نظرية التقريب الأمثل) . إذا كان W فضاء جزئيا من بعد منتهى لفضاء ضرب داخلى V وكان $\mathbf{u}$ متجها فى V فإن $\text{proj}_W \mathbf{u}$ هو **التقريب الأمثل** للمتجه $\mathbf{u}$ من W بمعنى أن

$$\|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

لكل متجه $\mathbf{w}$ من W يختلف عن $\text{proj}_W \mathbf{u}$.

الإثبات : يمكننا لأى متجه $\mathbf{w}$ فى W أن نكتب

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}) + (\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}) \qquad (4.24)$$

ولكن $\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}$ لكونه الفرق بين متجهين من W . يكون فى W ، وأيضاً $\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}$ يكون عموديا على W . لهذا فيكون الحدان فى الطرف الأيمن من (4.24) متعامدين . إذا من نظرية فيثاغورث (نظرية ١٧ من قسم ٤ – ٨) :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|^2 + \|\text{proj}_W \mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2$$

إذا كان $\mathbf{w} \neq \text{proj}_W \mathbf{u}$ فإن الحد الثانى فى هذا المجموع يكون موجبا لهذا

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\|^2$$

أو بصيغة مكافئة

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|\mathbf{u} - \text{proj}_W \mathbf{u}\| \quad \blacksquare$$

تعطى تطبيقات النظريتين السابقتين فى قسم ٧ – ٢ .

تمارين ٤ — ٩

١ – اعتبر R^2 له الضرب الداخلى الإقليدى . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

(أ) $(1, 0), (0, 2)$

(ب) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(جـ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(د) $(1, 0), (0, 0)$

٢ – اعتبر R^2 له الضرب الداخلى الإقليدى . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

(أ) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(ب) $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \quad (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), \quad (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

(جـ) $(1, 0, 0), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (0, 0, 1)$

(د) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

٣ – اعتبر فى P_2 الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٤٥ . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

(أ) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2, \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2, \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

(ب) $1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x^2$

٤ – اعتبر فى M_{22} الضرب الداخلى الموجود فى مثال ٢ ٤ . أى مما يلى يكون فئة عيارية متعامدة ؟

(أ) $\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

٥ – اعتبر $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ و $\mathbf{y} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$

أثبت أن $\{x, y\}$ تكون عيارية متعامدة إذا كان R^2 له الضرب الداخلى $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, ولا تكون عيارية متعامدة إذا كان R^2 له الضرب الداخلى الإقليدى .

٦ – أثبت أن

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (2, 3, 2, -2), \mathbf{u}_4 = (-1, 2, -1, 1)$$

فئة متعامدة فى R^4 مع الضرب الداخلى الإقليدى . بجعل معيار كل من هذه المتجهات الوحدة ، احصل على فئة عيارية متعامدة .

٧ – اعتبر P^2 له الضرب الداخلى الإقليدى . استخدم عملية جرام – شميدت لتحويل الأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

(أ) $\mathbf{u}_1 = (1, -3), \mathbf{u}_2 = (2, 2)$ (ب) $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (3, -5)$

٨ – اعتبر R^3 له الضرب الداخلى الإقليدى . استخدم عملية جرام – شميدت لتحويل الأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

(أ) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$

(ب) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

٩ – اعتبر R^4 له الضرب الداخلى الإقليدى . استخدم عملية جرام – شميدت لتحويل الأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

$$\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1), \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$$

١٠ – اعتبر R^3 له الضرب الداخلى الإقليدى . أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئى المنشأ من $(0, 1, 2)$ و $(-1, 0, 1)$

١١ – اعتبر R^3 له الضرب الداخلى $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. ستخدم عملية جرام – شميدت لتحويل

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1) \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0) \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$$

إلى أساس عيارى متعامد .

١٢ – الفضاء الجزئى من R^3 المنشأ من المتجهين $u_1 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ and $u_2 = (0, 1, 0)$ هو مستوى يمر بنقطة الأصل . عبر عن $w = (1,2,3)$ بالصورة $w = w_1 + w_2$ حيث w_1 يقع فى المستوى و w_2 يكون عموديا على المستوى .

١٣ – كرر التمرين ١٢ مع $u_1 = (1, 1, 1)$ و $u_2 = (2, 0, -1)$

١٤ – اعتبر R^4 له الضرب الداخلى الإقليدى. عبر عن $w = (-1, 2, 6, 0)$ بالصورة $w = w_1 + w_2$ حيث w_1 يكون من الفضاء W المنشأ من $u_1 = (-1, 0, 1, 2)$ و $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, و w_2 يكون عموديا على W .

١٥ – اعتبر $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخلى V . إثبت أنه إذا كان w متجها فى V فإن $\|w\|^2 = \langle w, v_1\rangle^2 + \langle w, v_2\rangle^2 + \langle w, v_3\rangle^2$.

١٦ – اعتبر $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساسا عياريا متعامد لفضاء ضرب داخلى V . أثبت أنه إذا كان w متجها فى V فإن

$$\|w\|^2 = \langle w, v_1\rangle^2 + \langle w, v_2\rangle^2 + \cdots + \langle w, v_n\rangle^2$$

١٧ – فى الخطوة ٣ من إثبات نظرية ٢١ ، ذكر أن « الاستقلال الخطى للفئة $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ يضمن أن

$$u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 \neq 0$$ » .

أثبت هذا التقرير .

١٨ – أثبت نظرية ٢٠ .

(ارشاد : أثبت أن المتجه w_1 فى (4.20) يقع فى W ، والمتجه w_2 فى (4.21) يكون عموديا على W وأن $u = w_1 + w_2$.

١٩ – **(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .)** اعتبر أن الفضاء الخطى P_2 له الضرب الداخلى

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

طبق عملية جرام – شميدت لتحويل الأساس المعتاد $S = \{1, x, x^2\}$ إلى أساس عيارى متعامد .
(تسمى كثيرات الحدود فى الأساس الناتج بالثلاثة الأول من كثيرات حدود ليجندر التى معيارها الوحدة)

٢٠ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) استخدام نظرية ١٦ للتعبير عما يلى كتركيبات خطية من الثلاثة الأول من كثيرات حدود ليجندر التى معيارها الوحدة

(أ) $1 + x + 4x^2$ (ب) $2 - 7x^2$ (جـ) $4 + 3x$

٢١ – **(للقراء الذين دراسوا حساب التفاضل والتكامل)** اعتبر P_2 له الضرب الداخلى

$$\langle p, q\rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

طبق عملية جرام – شميدت لتحويل الأساس المعتاد $S = \{1, x, x^2\}$ إلى أساس عيارى متعامد .

٢٢ - (للقراء الذين درسوا المادة الاختيارية فى هذا القسم). أوجد النقطة Q فى المستوى $5x - 3y + z = 0$ الأقرب إلى النقطة $P(1, -2, 4)$ ، وحدد المسافة بين النقطة P والمستوى (**أرشاد** : انظر إلى المستوى كفضاء جزئى W من R^3 مع الضرب الداخلى الإقليدى طبق نظرية ٢٣) .

٢٣ - (**القراء الذين درسوا المادة الاختيارية فى هذا القسم .**) أوجد النقطة Q على المستقيم

$$x = 2t$$
$$y = -t \qquad -\infty < t < +\infty$$
$$z = 4t$$

الأقرب إلى النقطة $P(-4, 8, 1)$. (**أرشاد** : أنظر الإرشاد فى التمرين السابق .)

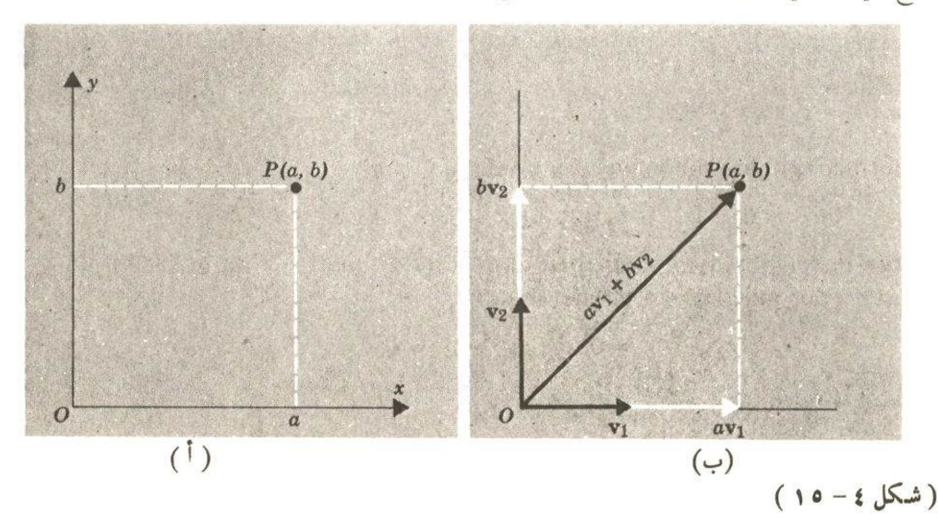
٤ ـــ ١٠ الأحداثيات ـــ تغيير الأساس

توجد علاقة قوية بين مفهوم الأساس ومفهوم نظام الإحداثيات . نطور هذه الفكرة فى هذا القسم ونناقش أيضاً بعض النتائج عن تغيير الأساسات للفضاءات الخطية .

فى الهندسة التحليلية المستوية نخص النقطة P فى المستوى بزوج من الأحداثيات (a, b) باستخدام محاور إحداثيات متعامدة . ولكن يمكن أيضاً إدخال إحداثيات بدون الاستناد إلى محاور الإحداثيات وذلك باستخدام المتجهات . فمثلا بدلا من إدخال محورى إحداثيات كما فى شكل ٤ - ١٥ أ فإننا نفرض متجهين متعامدين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ طول كل منهما 1 ولهما نفس نقطة البداية O. (ويكون هذان المتجهان أساسا للفضاء R^2.) باسقاط عمودين من النقطة P على المستقيمين المحددين من $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ نحصل على المتجهين $a\mathbf{v}_1$ ، $b\mathbf{v}_2$ حيث

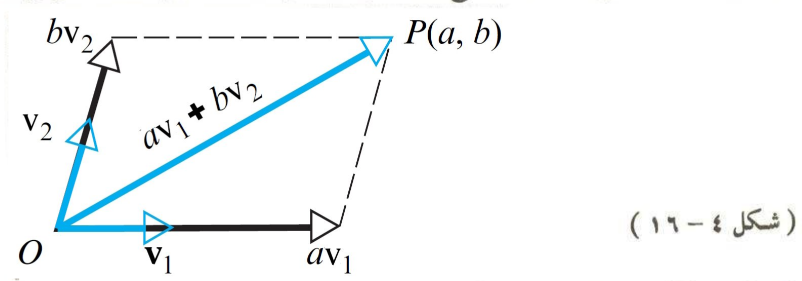
$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

(شكل ٤ - ١٥ ب) من الواضح أن العددين a ، b اللذين حصلنا عليهما الآن هما نفسهما إحداثيا P بالنسبة إلى نظام الإحداثيات فى شكل ٤ - ١٥ أ لذلك يمكن أن ننظر إلى إحداثى P بأنهما العددان اللذان نحتاج إليهما للتعبير عن المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة متجهى الأساس $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$.



(**شكل ٤ - ١٥**)

ليس من الضرورى لهدف إعطاء إحداثيات للنقط فى المستوى أن يكون متجها الأساس $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ متعامدين أو طول كل منهما 1 ، فأى أساس للفضاء R^2 سيكفى . فمثلا باستخدام متجهى الأساس $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ فى شكل ٤ – ١٦ ، يمكننا إعطاء زوج وحيد من الأحداثيات للنقطة P باسقاط P موازية لمتجهى الأساس



(شكل ٤ – ١٦)

لكى نجعل $\overrightarrow{OP}$ هو قطر متوازى الأضلاع المحدد بمتجهين $a\mathbf{v}_1$ ، $b\mathbf{v}_2$ أى

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

يمكننا اعتبار (a, b) مركبتى P بالنسبة إلى الأساس $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. هذه الفكرة المعممة لمفهوم الأحداثيات هامة لأنها يمكن أن تمتد إلى فضاءات خطية أكثر تعميما ولكن سنحتاج أولا إلى بعض النتائج الأولية .

افرض $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا لفضاء خطى V له بعد منتهى . حيث أن S تنشئ V ، فإن أى متجه فى V يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من متجهات S . بالإضافة إلى ذلك فان الاستقلال الخطى لمتجهات S يضمن وجود طريقة واحدة فقط للتعبير عن أى متجه كتركيبة خطية من متجهات S . لمعرفة السبب ، افرض أن متجها $\mathbf{v}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

وأيضاً

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

طرح المعادلة الثانية من الأولى يعطى

$$\mathbf{0} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n$$

حيث أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو تركيبة خطية من متجهات S ، فإن الاستقلال الخطى لمتجهات S يحتم أن

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \ldots, c_n - k_n = 0$$

أى أن

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \ldots, c_n = k_n$$

وتلخيصا لما سبق لدينا النتيجة التالية

نظرية ٢٤ : إذا كان $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء الخطى V ، فإن أى متجه $\mathbf{v}$ من V يمكن التعبير عنه بالصيغة $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ بطريقة واحدة لا غير .

إذا كان $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء خطى V ذى بعد منتهى وكان

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

هو التعبير عن $\mathbf{v}$ بدلالة الأساس S ؛ فإن الأعداد القياسية c_1 ، c_2 ، . . . ، c_n تسمى **بأحداثيات $\mathbf{v}$** بالنسبة إلى الأساس S . ويرمز **لمتجه إحداثيات $\mathbf{v}$** بالنسبة إلى S بالرمز $(\mathbf{v})_S$ وهو المتجه من R^n المعرف بواسطة

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ويرمز **لمصفوفة إحداثيات $\mathbf{v}$** بالنسبة إلى S بالرمز $[\mathbf{v}]_S$ وهى المصفوفة من النوع $n\times 1$ المعرفة بواسطة

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

مثال (٥٩) :

فى مثال ٢٨ من قسم ٤ – ٥ أثبتنا أن $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ هو أساس للفضاء R^3 حيث

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \text{and } \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$.

(أ) أوجد متجه الأحداثيات ومصفوفة الأحداثيات للمتجه $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ بالنسبة إلى S .

(ب) أوجد المتجه $\mathbf{v}$ فى R^3 الذى يكون متجه إحداثياته بالنسبة إلى S هو $(\mathbf{v}_S) = (-1, 3, 2)$

الحل (أ) : يجب أن نوجد أعدادا قياسية c_1 ، c_2 ، c_3 وبحيث يكون

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

أو بدلالة المركبات

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

مساواة المركبات المتناظرة يعطى

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

بحل هذا النظام نحصل على $c_1 = 1$ ، $c_2 = -1$ ، $c_3 = 2$. إذا

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

الحل (ب) : باستخدام تعريف متجه الأحداثيات $(\mathbf{v})_S$ ، نحصل على

$$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = (11, 31, 7)$$

تعتمد متجهات ومصفوفات الإحداثيات على الترتيب الذى تكتب به متجهات الأساس ، فأى تغيير فى ترتيب متجهات الأساس يسبب تغييرا مناظرا فى ترتيب المكونات فى مصفوفات الأحداثيات ومتجهات الأحداثيات .

مثال (٦٠) :

اعتبر الأساس $S = \{1, x, x^2\}$ للفضاء P_2. بالمعاينة يكون متجه الأحداثيات ومصفوفةالأحداثيات لكثيرة الحدود $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ بالنسبة إلى S هما

$$[\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (\mathbf{p})_S = (a_0, a_1, a_2)$$

مثال (٦١) :

اعتبر أننا أدخلنا محاور أحداثيات متعامدة xyz فى فضاء ثلاثى واعتبر الاساس المعتاد $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ، حيث

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \text{ and } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

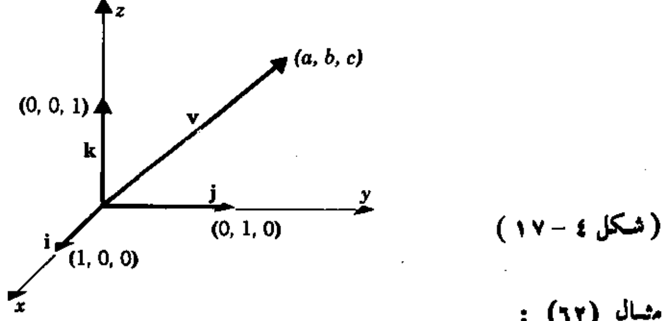
إذا كان ، كما فى شكل ٤ - ١٧ ، $\mathbf{v} = (a, b, c)$ هو أى متجه فى R^3 فإن

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

وهذا يعنى أن

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (\mathbf{v})_S$$

بعباره أخرى فإن مركبات المتجه $\mathbf{v}$ بالنسبة إلى نظام الأحداثيات المتعامدة xyz هى نفسها مركبات $\mathbf{v}$ بالنسبة إلى الأساس المعتاد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$



(شكل ٤ - ١٧)

مثال (٦٢) :

إذا كان $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخلى V ، فإنه من نظرية ١٨ فى قسم ٤ - ٩ يكون التعبير عن متجه $\mathbf{u}$ بدلالة الأساس S هو

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

وهذا يعنى أن

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle)$$

وأيضاً

$$[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

فمثلا إذا كان

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), \mathbf{v}_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})$$

فكما لاحظنا فى مثال ٥٥ من قسم ٤ – ٩ ، يكون $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ أساسا عياريا متعامدا للفضاء R^3 بالنسبة إلى الضرب الداخلى الإقليدى . إذا كان $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$ ، فإن

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle = -1, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle = \tfrac{4}{5}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle = \tfrac{22}{5}$$

إذا

$$(\mathbf{u})_S = (-1, \tfrac{4}{5}, \tfrac{22}{5}) \quad \text{و} \quad [\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ \tfrac{4}{5} \\ \tfrac{22}{5} \end{bmatrix}$$

الأساسات العيارية المتعامدة لفضاءات الضرب الداخلى تكون مناسبة وذلك لأنه ، كما تبين النظرية التالية ، تتحقق الكثير من الصيغ المألوفة فى مثل هذه الفضاءات .

نظرية ٢٥ : إذا كانت S أساسا عياريا متعامدا لفضاء ضرب داخلى من بعد n وكان

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{و} \quad (\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

فإن

(أ) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

(ب) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

(جـ) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$

ناقش الإثباتات ، وبعض الأمثلة العددية فى التمارين .

نعود الآن إلى المسألة الأساسية فى هذا القسم .

مسألة تغيير الأساس : إذا غيرنا الأساس لفضاء خطى من أساس معين قديم B إلى أساس معين جديد B' ، فكيف ترتبط مصفوفة الأحداثيات القديمة $[\mathbf{v}]_B$ للمتجه $\mathbf{v}$ بمصفوفة الأحداثيات الجديدة $[\mathbf{v}]_{B'}$ ؟

للتبسيط سنحل هذه المسألة للفضاء الخطى الثنائى . ويكون الحل للفضاء ذى n بعدا مماثلا وسيترك كتمرين . ليكن

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{و} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

الأساسان القديم والجديد على الترتيب . سنحتاج إلى مصفوفتى الأحداثيات لمتجهى الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد . لنفرض أنهما

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}; \tag{4.22}$$

أى أن

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a\mathbf{u}'_1 + b\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 &= c\mathbf{u}'_1 + d\mathbf{u}'_2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ليكن $\mathbf{v}$ أى متجه فى V ولتكن

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

هى مصفوفة الأحداثيات القديمة ، فيكون

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 \tag{4.25}$$

لإيجاد إحداثيات $\mathbf{v}$ الجديدة يجب أن نعبر عن $\mathbf{v}$ بدلالة الأساس الجديد B' . لإجراء ذلك نعوض من (4.23) فى (4.25) ، وهذا يعطى

$$\mathbf{v} = k_1(a\mathbf{u}'_1 + b\mathbf{u}'_2) + k_2(c\mathbf{u}'_1 + d\mathbf{u}'_2)$$

أو

$$\mathbf{v} = (k_1a + k_2c)\mathbf{u}'_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}'_2$$

إذا مصفوفة إحداثيات $\mathbf{v}$ الجديدة هى

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

التى يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

أو من (4.24) على الصورة

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\mathbf{v}]_B$$

تنص هذه المعادلة على أن مصفوفة الإحداثيات الجديدة $[\mathbf{v}]_{B'}$ يمكن الحصول عليها بضرب مصفوفة الإحداثيات القديمة $[\mathbf{v}]_B$ من اليسار بالمصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

التى يكون عموداها إحداثيات متجهى الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد (أنظر 4.22) لهذا يكون لدينا الحل التالى لمسألة تغيير الأساس :

حل مسألة تغيير الأساس: إذا غيرنا الأساس لفضاء خطى V من أساس معين قديم $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ إلى أساس معين جديد $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots \mathbf{u}'_n\}$ فإن مصفوفة الأحداثيات القديمة $[\mathbf{v}]_B$ للمتجه $\mathbf{v}$ ترتبط بمصفوفة الأحداثيات الجديد $[\mathbf{v}]_{B'}$ بواسطة المعادلة

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B \tag{4.26}$$

حيث أعمدة P هى مصفوفات الأحداثيات لمتجهات الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد ، أى أن أعمدة P هى

$$[\mathbf{u}_1]_{B'}, [\mathbf{u}_2]_{B'}, \ldots, [\mathbf{u}_n]_{B'}$$

شكليا يمكن كتابة المصفوفة P على الصورة

$$P = \Big[[\mathbf{u}_1]_{B'} \;\Big|\; [\mathbf{u}_2]_{B'} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [\mathbf{u}_n]_{B'} \Big]$$

وتسمى **مصفوفة الانتقال** من B إلى B' .

مثال (٦٣) :

اعتبر الأساسين

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{و} \quad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$$

للفضاء R^2 حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) استخدم (4.26) لإيجاد $[\mathbf{v}]_{B'}$ إذا كان

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل (أ) : أولا يجب أن نجد مصفوفتى الإحداثيات لمتجهى الأساس القديم $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ بالنسبة إلى الأساس الجديد B'. باتباع الطريقة فى مثال ٥٩ أ يجب أن يكون القارئ قادرا على إثبات أن

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2$$
$$\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2$$

(تحقق من هذا) ، إذا

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة الانتقال من B إلى B' هى

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل (ب) : بالمعاينة :

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

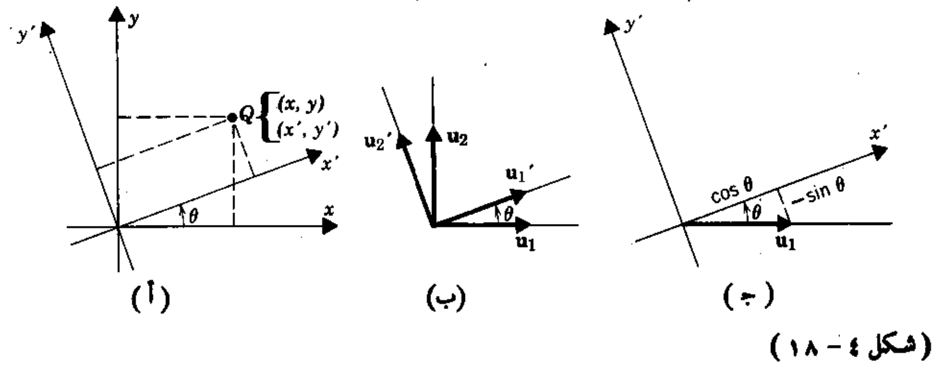
لهذا باستخدام (4.26) ومصفوفة الانتقال فى الجزء (أ) ، يكون

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

قد يرغب القارئ فى التأكد من هذه النتيجة بالتحقق من أن $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2$.

مثال (٦٤) : (تطبيق فى دوران محاور الأحداثيات) :

فى كثير من المسائل يعطى نظام أحداثيات xy متعامد ونحصل على نظام أحداثيات جديد $x'y'$ بدوران النظام xy حول نقطة الأصل فى اتجاه عكس عقارب الساعة زاوية θ . عندما يحدث هذا فإن أى نقطة Q فى المستوى يكون لها فئتان من الأحداثيات : الأحداثيان (x, y) بالنسبة إلى النظام xy والأحداثيان (x', y') بالنسبة إلى النظام $x'y'$ (شكل ٤ – ١٨ أ) .



(شكل ٤ – ١٨)

بادخال متجهى وحدة $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ على محورى x ، y الموجبين ومتجهى وحدة $\mathbf{u}'_1$ و $\mathbf{u}'_2$ على محورى x' و y' الموجبين يمكننا أن نعتبر هذا الدوران كتغيير من أساس قديم $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ إلى أساس جديد $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ (شكل ٤ – ١٨ ب) . فتكون الأحداثيات الجديدة (x', y') والأحداثيات القديمة (x, y) للنقطة Q مرتبطة بواسطة

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

حيث P هى مصفوفة الانتقال من B إلى B' . لإيجاد P يجب أن نحدد مصفوفتى الأحداثيات لمتجهى الأساس القديم $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ بالنسبة إلى الأساس الجديد . كما هو موضح فى شكل ٤ – ١٨ جـ فإن مركبتى $\mathbf{u}_1$ فى الأساس الجديد هما $\cos\theta$ and $-\sin\theta$ لهذا فإن

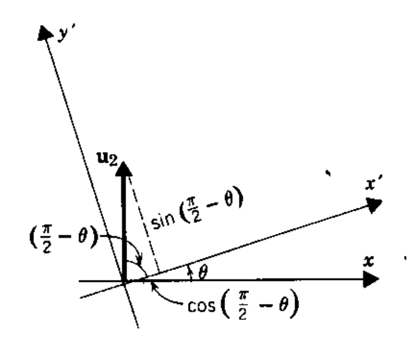
$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

بينما ، كما هو مبين فى شكل ٤ – ١٨ د التالى ، فإن مركبتى $\mathbf{u}_2$ فى الأساس الجديد هما $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$ ، $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$ لهذا فإن

$$[\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة الانتقال من B إلى B' هى

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



(شكل ٤ – ١٨ (د))

وتصبح (4.27)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

أو بصيغة مكافئة

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

فمثلا إذا دار المحوران بزاوية $\theta = 45°$ ، فبما أن

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

فإن (4.28) تصبح

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

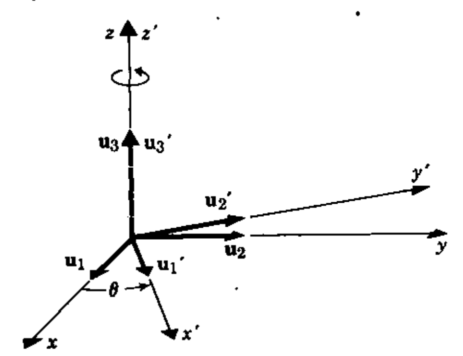
فإذا كانت الأحداثيات القديمة للنقطة Q هى $(x, y) = (2, -1)$ فإن

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

لذا تكون الأحداثيات الجديدة للنقطة Q هى $(x', y') = (1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$.

مثال (٦٥) : (تطبيق على دوران المحاور فى الفضاء الثلاثى) :

نفرض أن نظام أحداثيات متعامد xyz قد أدير حول محور z فى عكس اتجاه عقارب الساعة (بالنظر من أسفل محور z الموجب) زاوية θ (شكل ٤ — ١٩) . إذا أدخلنا متجهات وحدة $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ ، $\mathbf{u}_3$ على محاور x ، y ، z ، الموجبة ومتجهات وحدة $\mathbf{u}'_1$ ، $\mathbf{u}'_2$ ، $\mathbf{u}'_3$ على محاور x' ، y' ، z' الموجبة



(شكل ٤ - ١٩)

فيمكننا أن نعتبر الدوران كعملية تغيير من الأساس القديم $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ إلى الأساس الجديد $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}'_3\}$. على ضوء مثال ٦٤ يجب أن يكون واضحا أن

$$[\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

وعلاوة على ذلك ، حيث أن $\mathbf{u}_3$ يمتد وحدة واحدة إلى أعلى محور z' الموجب فإن

$$[\mathbf{u}_3]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة الانتقال من B إلى B' هي

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتكون الأحداثيات القديمة (x, y, z) للنقطة Q مرتبطة بأحداثياتها الجديدة (x', y', z') بالعلاقة

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

مثال (٦٦) :

اعتبر المتجهات

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فى مثال ٦٣ أوجدنا مصفوفة الانتقال من الأساس $B=\{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\}$ للفضاء R^2 إلى الأساس $B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\}$ ، ومع هذا يمكننا الآن أيضاً أن نسأل عن مصفوفة الانتقال من B' إلى B. لحصول على هذه المصفوفة فإننا ببساطة نغير من وجهة نظرنا ونعتبر B' هو الأساس القديم و B هو الأساس الجديد . كالمعتاد أعمدة مصفوفة الانتقال ستكون أحداثيات متجهات الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس الجديد .

بالمعاينة

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

إذا

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا فإن مصفوفة الانتقال من B' لى B هى

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا ضربنا مصفوفة الانتقال من B إلى B' التى حصلنا عليها فى مثال ٦٣ ومصفوفة الانتقال من B' إلى B التى حصلنا عليها فى هذا المثال نجد أن

$$PQ = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

وهو ما يثبت أن $Q = P^{-1}$. وهذا ليس بصدفة كما تبين لنا النظرية التالية .

نظرية ٢٦ : إذا كانت P هى مصفوفة الانتقال من أساس B إلى أساس B' فإن

(أ) P تكون قابلة للانعكاس .

(ب) P^{-1} هى مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

(نرجىء الإثبات إلى نهاية هذا القسم) . تلخيصا لما سبق . إذا كانت P هى مصفوفة الانتقال من أساس B إلى أساس B' ، فيكون لاى متجه $\mathbf{v}$:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B$$
$$[\mathbf{v}]_B = P^{-1}[\mathbf{v}]_{B'}$$

تبين لنا النظرية التالية أنه إذا كانت مصفوفة الانتقال P من أساس عيارى متعامد إلى أساس عيارى متعامد آخر فإن معكوس P يكون إيجاده على درجة خاصة من السهولة .

نظرية ٢٧ : إذا كانت P مصفوفة الانتقال من أساس عيارى متعامد إلى أساس عيارى متعامد آخر لفضاء ضرب داخلى فإن

$$P^{-1} = P^t$$

(نحذف الإثبات .)

لتوضيح هذه النتيجة ، اعتبر مصفوفة الانتقال

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

التى حصلنا عليها فى مثال ٦٤ عندما أدرنا محاور الأحداثيات (ومن ثم غيرنا الأساس العيارى المتعامد $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ فى شكل ٤ – ١٨ ب إلى الأساس العيارى المتعامد $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$. من السهل التحقق أن

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

إذا $P^{-1} = P^t$.

تعريف : المصفوفة المربعة A التى لها الخاصية

$$A^{-1} = A^t$$

يقال أنها **مصفوفة عمودية** .

لذا تنص نظرية ٢٧ على أن مصفوفة الانتقال من أساس عيارى متعامد إلى آخر تكون دائما عمودية .

النتيجة التالية ، التى يناقش إثباتها فى التمارين ، تجعل من السهل تحديد متى تكون مصفوفة A من النوع $n \times n$ عمودية .

نظرية ٢٨ : العبارات التالية متكافئة :

(أ) A عمودية .

(ب) متجهات صفوف A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^n بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى .

(جـ) متجهات أعمدة A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^n بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى .

مثال (٦٧) :

اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات صفوف A هي

$$\mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى يكون

$$\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_3\| = 1$$

وأيضاً

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = 0$$

وعليه فإن متجهات صفوف A تكون فئة عيارية متعامدة فى R^3 . إذا A عمودية ويكون

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(سيجد القارئ أنه من المفيد تعليميا أن يتأكد أن متجهات أعمدة A أيضاً تكون فئة عيارية متعامدة .)

فى مثالى ٦٤ ، ٦٥ ذكرنا مسألة الربط بين الأحداثيات القديمة والأحداثيات الجديدة عندما يحدث تغيير هندسى (دوران) فى محاور الأحداثيات . فى بعض الأحيان تظهر المسألة المكسية التالية .

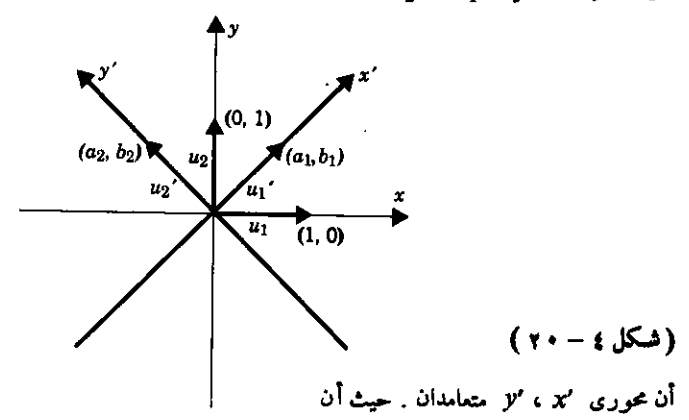
توجد علاقة معروفة

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

بين الأحداثيات القديمة والأحداثيات الجديدة ، حيث المصفوفة من النوع 2×2 عمودية . ومن المرغوب فيه أن نحدد كيف يرتبط هندسيا نظام أحداثيات xy ونظام أحداثيات $x'y'$. تسمى المعادلة(4.29) **تحويل أحداثيات عودى فى** R^2 . لدراسة تأثير تحويل أحداثيات عودى ، أعتبر المتجهات

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

فى نظام الأحداثيات xy ثم أدخل نظام أحداثيات $x'y'$ بحيث يكون محور x' الموجب فى اتجاه $\mathbf{u}'_1$ ومحور y' الموجب فى اتجاه $\mathbf{u}'_2$ (شكل ٤ - ٢٠) . لأنه من المفترض أن المصفوفة 2×2 فى (4.29) عمودية فإن المتجهين $\mathbf{u}'_1$ ، $\mathbf{u}'_2$ يكونان متعامدين وهذا يؤكد



(شكل ٤ - ٢٠)

أن محورى x' ، y' متعامدان . حيث أن

$$\mathbf{u}'_1 = a_1\mathbf{u}_1 + b_1\mathbf{u}_2$$

وأيضاً

$$\mathbf{u}'_2 = a_2\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2$$

فإن المصفوفة

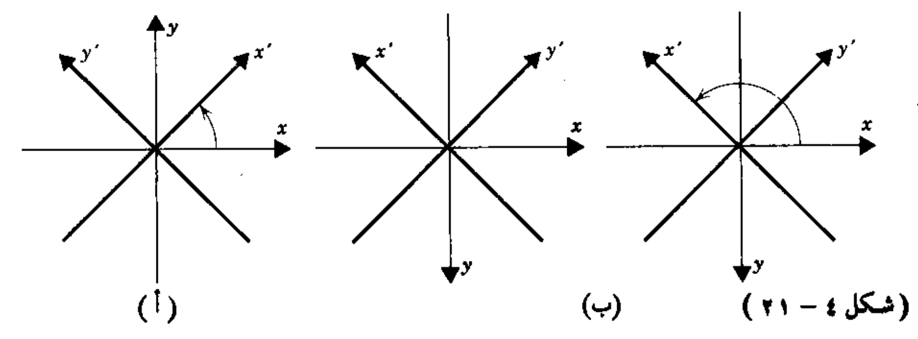
$$Q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

فى (4.29) تكون مصفوفة الانتقال من الأساس $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ إلى الأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

من الواضح أنه يوجد احتمالان إما أن نظام الأحداثيات $x'y'$ يمكن الحصول عليه بدوران نظام الأحداثيات xy (شكل ٤ – ٢١ أ) ، أو أن نظام الأحداثيات $x'y'$ يمكن الحصول عليه أولا بانعكاس نظام الأحداثيات xy بالنسبة إلى محور x ثم دوران نظام الأحداثيات المنعكس (شكل ٤ – ٢١ ب). قد أثبت فى التمارين أن محدد مصفوفة عمودية هو دائما $+1$ أو -1 ، وعلاوة على هذا يمكن إثبات أن تحويل الأحداثيات العمودى (4.29) يكون دورانا إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 1$$

ويكون انعكاسا متبوعا بدوران إذا كان هذا المحدد -1 .



(شكل ٤ – ٢١)

بالمثل يكون تحويل أحداثيات عمودى

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

فى R^3 دورانا إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

ودورانا مصحوبا بانعكاس فى أحد مستويات الأحداثيات إذا كان المحدد -1 .

مثـال (٦٨) :

تحويل الأحداثيات العمودى

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

يكون دورانا لأن

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$

ويكون محورا x' ، y' الموجبان فى اتجاه متجهى العمودين

$$\mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(شكل ٤ - ٢١)

مادة اختيارية :

إثبات نظرية ٢٦ : لتكن Q مصفوفة الانتقال من B' إلى B . سنثبت أن $QP = I$ ، ومن ثم نستنتج أن $Q = P^{-1}$ لكى نكمل الإثبات .

لتكن $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ وافرض أن

$$QP = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

من (4.26)

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P[\mathbf{x}]_B$$

وأيضاً

$$[\mathbf{x}]_B = Q[\mathbf{x}]_{B'}$$

لجميع X من V . بضرب طرفى المعادلة الأعلى من اليسار فى Q ثم التعويض من المعادلة الثانية نحصل على

$$[\mathbf{x}]_B = QP[\mathbf{x}]_B \tag{4.30}$$

لجميع $\mathbf{x}$ من V . وضع $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ فى (4.30) يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

أى

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\\vdots\\c_{n1}\end{bmatrix}$$

بالمثل التعويضات المتعاقبة $\mathbf{x}=\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ فى (4.30) تعطى

$$\begin{bmatrix}c_{12}\\c_{22}\\\vdots\\c_{n2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}c_{1n}\\c_{2n}\\\vdots\\c_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

إذا $QP=I$.

تمارين ٤ — ١٠

١ – أوجد مصفوفة أحداثيات ومتجه أحداثيات $\mathbf{w}$ بالنسبة إلى الأساس $S=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

(أ) $\mathbf{u}_1=(1, 0), \mathbf{u}_2=(0, 1); \mathbf{w}=(3, -7)$

(ب) $\mathbf{u}_1=(2, -4), \mathbf{u}_2=(3, 8); \mathbf{w}=(1, 1)$

(جـ) $\mathbf{u}_1=(1, 1), \mathbf{u}_2=(0, 2), \mathbf{w}=(a, b)$

٢ – أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات $\mathbf{v}$ بالنسبة إلى الأساس $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(أ) $\mathbf{v}=(2, -1, 3), \mathbf{v}_1=(1, 0, 0), \mathbf{v}_2=(2, 2, 0), \mathbf{v}_3=(3, 3, 3)$

(ب) $\mathbf{v}=(5, -12, 3), \mathbf{v}_1=(1, 2, 3), \mathbf{v}_2=(-4, 5, 6), \mathbf{v}_3=(7, -8, 9)$

٣ – أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات $\mathbf{p}$ بالنسبة إلى الأساس $S=\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

(أ) $\mathbf{p}=4-3x+x^2, \mathbf{p}_1=1, \mathbf{p}_2=x, \mathbf{p}_3=x^2$

(ب) $\mathbf{p}=2-x+x^2, \mathbf{p}_1=1+x, \mathbf{p}_2=1+x^2, \mathbf{p}_3=x+x^2$

٤ – أوجد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات A بالنسبة إلى الأساس $S=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}\quad A_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\quad A_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

٥ – فى كل جزء أعطى أساس عيار متعامد بالنسبة إلى الضرب الداخلى الأقليدى . استخدم طريقة مثال ٦٢ لإيجاد متجه أحداثيات ومصفوفة أحداثيات $\mathbf{w}$.

(أ) $\mathbf{w}=(3, 7); \mathbf{u}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(ب) $\mathbf{w}=(-1, 0, 2); \mathbf{u}_1=(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \mathbf{u}_2=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), \mathbf{u}_3=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

٦ – (أ) أوجد $\mathbf{w}$ إذا كان $(\mathbf{w})_S = (6, -1, 4)$ و S هو الأساس فى تمرين ٢ أ .

(ب) أوجد $\mathbf{q}$ إذا كان $(\mathbf{q})_S = (3, 0, 4)$ و S هو الأساس فى تمرين ٣ أ .

(جـ) أوجد B إذا كان $(B)_S = (-8, 7, 6, 3)$ و S هو الأساس فى تمرين ٤ .

٧ – اعتبر R^2 له الضرب الداخلى الأقليدى . واعتبر $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ أساسا عياريا متعامدا حيث $\mathbf{w}_1 = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}), \mathbf{w}_2 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ اعتبر $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ المتجهين فى R^2 اللذين لهما $(\mathbf{u})_S = (1, 1)$ ، $(\mathbf{v})_S = (-1, 4)$.

(أ) احسب $\|\mathbf{u}\|$ ، $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ، $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ باستخدام نظرية ٢٥ .

(ب) أوجد $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ وتأكد من صحة نتائج الجزء (أ) بحساب $\|\mathbf{u}\|$ ، $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ، $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ مباشرة .

٨ – اعتبر الأساسين $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ، $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ للفضاء R^2 ، حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{w}]_B$ ، حيث

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

واستخدم (4.26) لحساب $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(جـ) تأكد من عملك بحساب $[\mathbf{w}]_{B'}$ مباشرة .

(د) أوجد مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

٩ – كرر ما طلب فى تمرين ٨ حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

١٠ – اعتبر الأساسين $B\{= \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ، $B'\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ للفضاء R^3 حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{w}]_B$ ، حيث

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

واستخدم (4.26) لحساب $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(جـ) تأكد من عملك بحساب $[\mathbf{w}]_{B'}$ مباشرة .

١١ – كرر ما طلب فى تمرين ١٠ حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

١٢ – اعتبر الأساسين $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ ، $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ للفضاء P_1 حيث

$\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \ \mathbf{q}_1 = 2, \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$.

(أ) أوجد مصفوفة الانتقال من B إلى B' .

(ب) احسب مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{p}]_B$ ، حيث $\mathbf{p} = -4 + x$ واستخدم (4.26) لحساب $[\mathbf{p}]_{B'}$.

(جـ) تأكد من عملك بحساب $[\mathbf{p}]_{B'}$ مباشرة .

(د) أوجد مصفوفة الإنتقال من B' إلى B .

١٣ – اعتبر V هو الفضاء المنشأ من $\mathbf{f}_1 = \sin x$ ، $\mathbf{f}_2 = \cos x$.

(أ) أثبت أن $\mathbf{g}_1 = 2 \sin x + \cos x$ ، $\mathbf{g}_2 = 3 \cos x$ يكونان أساسا للفضاء V .

(ب) أوجد مصفوفة الانتقال من $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ إلى $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$.

(جـ) احسب مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{h}]_B$ حيث $\mathbf{h} = 2 \sin x - 5 \cos x$ و استخدم (4.26) لإيجاد $[\mathbf{h}]_{B'}$.

(د) تأكد من عملك بحساب $[\mathbf{h}]_{B'}$ مباشرة .

(هـ) أوجد مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

١٤ – اعتبر أن نظام الأحداثيات المتعامدة $x' y'$ قد حصلنا عليه بدوران نظام الأحداثيات المتعامدة xy بزاوية $\theta = 3\pi/4$.

(أ) أوجد الإحداثيين فى النظام $x' y'$ للنقطة التى إحداثياها فى النظام xy هما $(-2, 6)$.

(ب) أوجد الأحداثيين فى النظام xy للنقطة التى إحداثياها فى النظام $x' y'$ هما $(5, 2)$.

١٥ – كرر تمرين ١٤ بزاوية $\theta = \pi/3$.

١٦ – اعتبر أن نظام الأحداثيات المتعامدة $x'y'z'$ قد حصلنا عليه بدوران نظام الأحداثيات المتعامدة $x\,y\,z$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور (بالنظر إلى أسفل محور z) بزاوية $\theta = \pi/4$.

(أ) أوجد الأحداثيات فى النظام $x'y'z'$ للنقطة التى أحداثياتها فى النظام $x\,y\,z$ هى $(-1, 2, 5)$.

(ب) أوجد الأحداثيات فى النظام $x\,y\,z$ للنقطة التى أحداثياتها فى النظام $x'y'z'$ هى $(1,6,-3)$.

١٧ – كرر تمرين ١٦ بدوران زاوية $\theta = \pi/3$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y (بالنظر من على محور y الموجب فى اتجاه نقطة الأصل) .

١٨ – كرر تمرين ١٦ بدوران زاوية $\theta = 3\pi/4$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x (بالنظر من على محور x الموجب فى اتجاه نقطة الأصل) .

١٩ – استخدم نظرية ٢٨ لتحديد أى مما يلى تكون مصفوفة عمودية .

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

٢٠ – أوجد المصفوفات العكسية لمصفوفات تمرين ١٩ التى تكون عمودية

٢١ – أثبت أن كلا من المصفوفتين الآتيتين هى مصفوفة عمودية لجميع قيم θ .

(أ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢٢ – أوجد المصفوفتين العكسيتين للمصفوفتين فى تمرين ٢١

٢٣ – اعتبر تحويل الأحداثيات العمودية

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

أوجد $(x' y')$ للنقط التي أحداثياتها (x, y) كما يلي :

(أ) $(2, -1)$ (ب) $(4, 2)$ (جـ) $(-7, -8)$ (د) $(0, 0)$

٢٤ – ارسم بيانيا محورى $x\ y$ ومحورى $x'\ y'$ لتحويل الأحداثيات فى تمرين ٢٣ .

٢٥ – لأى مما يلى يكون $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ دورانا ؟

(أ) $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(جـ) $P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (د) $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

٢٦ – ارسم بيانيا محورى $x\ y$ ومحورى $x'\ y'$ لتحويلات الأحداثيات فى تمرين ٢٥ .

٢٧ – اعتبر تحويل الأحداثيات العمودى .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

أوجد (x', y', z') للنقط التي تكون أحداثياتها (x, y, z) كما يلي :

(أ) $(3, 0, -7)$ (ب) $(1, 2, 6)$ (جـ) $(-9, -2, -3)$ (د) $(0, 0, 0)$

٢٨ – ارسم بيانيا محاور $x\ y\ z$ ومحاور $x'\ y'\ z'$ لتحويل الأحداثيات فى تمرين ٢٧ .

٢٩ – لأى مما يلى يكون $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ دورانا ؟

(أ) $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

٣٠ – ارسم بيانيا محاور $x\ y\ z$ ومحاور $x'\ y'\ z'$ لتحويل الأحداثيات فى تمرين ٢٩ .

٣١ – (أ) حصلنا على نظام أحداثيات متعامدة $x'\ y'\ z'$ بدوران نظام أحداثيات $x\ y\ z$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y بزاوية θ (بالنظر من على محور y الموجب فى اتجاه نقطة الأصل .) أوجد مصفوفة A بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

حيث (x, y, z) ، (x', y', z') هما أحداثيات نقطة فى النظامين $x\ y\ z$ ، $x'\ y'\ z'$ على الترتيب .

(ب) كرر الجزء (أ) لدوران حول محور x .

٣٢ – حصلنا على نظام أحداثيات متعامدة $x'' \, y'' \, z''$ أولا بدوران نظام أحداثيات متعامدة $x \, y \, z$ زاوية $60°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور z (بالنظر إلى تحت ، من محور z الموجب) للحصول على نظام أحداثيات $x' \, y' \, z'$ وبعد ذلك دوران نظام الأحداثيات $x' \, y' \, z'$ زاوية $45°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y' (بالنظر من على اتجاه y' الموجب إلى نقطة الأصل) .

أوجد مصفوفة A بحيث يكون

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

حيث (x, y, z) ، (x'', y'', z'') هما الأحداثيات فى النظامين $x \, y \, z$ ، $x'' \, y'' \, z''$ لنقطة.

٣٣ – أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة عمودية فإن A^t أيضاً تكون عمودية .

٣٤ – أثبت أن أية مصفوفة من النوع $n \times n$ تكون عمودية إذا وفقط إذا كانت صفوفها تكون فئة عيارية متعامدة R^n .

٣٥ – استخدم تمرينى ٣٣ ، ٣٤ لإثبات أن أية مصفوفة من النوع $n \times n$ تكون عمودية إذا وفقط إذا كانت أعمدتها تكون فئة عيارية متعامدة R^n .

٣٦ – أثبت أنه إذا كانت P مصفوفة عمودية فإن $\det(P) = 1$ أو $\det(P) = -1$.

٣٧ – أثبت نظرية ٢٥ – أ .

٣٨ – أثبت نظرية ٢٥ – ب .

٣٩ – أثبت نظرية ٢٥ – جـ .

٥- التحويلات الخطية

٥ ــ ١ مقدمة للتحويلات الخطية

فى هذا القسم سنبدأ فى دراسة الدوال ذات القيم الاتجاهية لمتغير متجه . أى الدوال التى لها الصورة $\mathbf{w}=F(\mathbf{v})$ حيث كل من المتغير المستقل $\mathbf{v}$ والمتغير التابع $\mathbf{w}$ هو متجه . وسوف نركز على فصل خاص من دوال المتجهات وهو مايسمى بالتحويلات الخطية . ولهؤلاء تطبيقات هامة كثيرة فى الطبيعة والعلوم الهندسية والعلوم الاجتماعية والأفرع المختلفة من الرياضيات .

إذا كان V، W فضاءين خطيين وكانت F دالة بحيث تلازم متجهاً وحيداً من W بكل متجه من V ، فإننا نقول أن F ترسم V إلى W ونكتب $F: V \to W$. وعلاوة على هذا إذا كانت F تلازم المتجه $\mathbf{w}$ بالمتجه $\mathbf{v}$ فنكتب $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$ ونقول أن $\mathbf{w}$ هى صورة $\mathbf{v}$ بتأثير F .

للتوضيح ، إذا كان $\mathbf{v} = (x, y)$ متجهاً فى R^2 فإن الصيغة

$$F(\mathbf{v}) = (x, x + y, x - y) \quad (5.1)$$

تعرف دالة بحيث ترسم R^2 إلى R^3 . وبصفة خاصة إذا كان $\mathbf{v} = (1, 1)$ فإن صورة $\mathbf{v}$ بتأثير F هى $F(\mathbf{v}) = (1, 2, 0)$.

تعريف : إذا كانت $F: V \to W$ دالة من الفضاء الخطى V إلى الفضاء الخطى W ، فإن F تسمى **تحويلا خطياً** إذا كان

(i) $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ لكل متجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ من V .

(ii) $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$ لكل متجه $\mathbf{u}$ من V ولكل عدد قياسى k .

للتوضيح اعتبر $F: R^2 \to R^3$ هى الدالة المعرفة بواسطة (5.1) إذا كان $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ ، $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ فإن $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, وإذن

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2]) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

أيضاً إذا كان k عدداً قياسياً فإن $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1)$, وإذن

$$\begin{aligned} F(k\mathbf{u}) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= kF(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

لذا تكون F تحويلا خطياً .

إذا كانت $F : V \to W$ تحويلا خطيا ، فإنه لأى $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ فى V ولأى عددين قياسيين k_1 ، k_2 ، يكون

$$F(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2) = F(k_1\mathbf{v}_1) + F(k_2\mathbf{v}_2) = k_1F(\mathbf{v}_1) + k_2F(\mathbf{v}_2)$$

بالمثل إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ متجهات فى V و كانت k_1 ، k_2 ، . . . ، k_n أعداداً قياسية ، فإن

$$F(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n) = k_1F(\mathbf{v}_1) + k_2F(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_nF(\mathbf{v}_n) \quad (5.2)$$

سنعطى الآن بعض أمثلة أخرى للتحويلات الخطية .

مثـــال (١) :

اعتبر A مصفوفة محددة من النوع $m \times n$. إذا استعملنا رموز المصفوفات للمتجهات فى R^m ، R^n فيمكننا تعريف دالة $T : R^n \to R^m$ بواسطة

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

لاحظ أنه إذا كانت $\mathbf{x}$ مصفوفة من النوع $n\times 1$ فإن حاصل الضرب $A\mathbf{x}$ يكون مصفوفة من النوع $m\times 1$، لهذا فإن T ترسم R^n إلى R^m . وعلاوة على هذا T تكون خطية ، لإثبات هذا نفرض أن $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ مصفوفتان من النوع $n \times 1$ وأن k عدداً قياسياً . باستخدام خواص ضرب المصفوفات نحصل على

$$A(k\mathbf{u}) = k(A\mathbf{u}) \qquad \text{و} \qquad A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

أو بصيغة مكافئة

$$T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \qquad \text{و} \qquad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

سنسمى التحويل الخطى فى هذا المثال **بالضرب فى** A . وتسمى التحويلات الخطية من هذا النوع **بتحويلات المصفوفات** .

مثـــال (٢) :

كحالة خاصة من المثال السابق ، اعتبر θ زاوية ثابتة واعتبر $T : R^2 \to R^2$ ضرباً فى المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

إذا كان $\mathbf{v}$ هو المتجه ·

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

فإن

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

هندسياً يكون $T(\mathbf{v})$ هو المتجه الذى ينتج إذا دار $\mathbf{v}$ بزاوية θ لإثبات هذا ، نفرض أن ϕ هى الزاوية بين $\mathbf{v}$ وبين اتجاه محور x الموجب ، وأن

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

هو المتجه الذى ينتج إذا دار $\mathbf{v}$ بزاوية θ (شكل ٥ - ١) . سنثبت أن $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. إذا كان r يدل على طول $\mathbf{v}$ فإن

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$

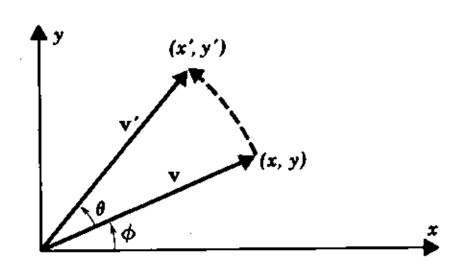
بالمثل حيث أن $\mathbf{v}'$ له نفس الطول مثل $\mathbf{v}$ ، فإن

$$x' = r\cos(\theta + \phi) \qquad y' = r\sin(\theta + \phi)$$

إذن

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r\cos(\theta + \phi) \\ r\sin(\theta + \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

يسمى التحويل الخطى فى هذا المثال بدوران R^2 بالزاوية θ .



(شكل ٥ - ١)

مثـــال (٣) :

اعتبر V ، W فضاءين خطيين . فيكون الراسم $T: V \rightarrow W$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ لكل $\mathbf{v}$ من V تحويلا خطياً يسمى **بالتحويل الصفرى** . لإثبات أن T خطى ، لاحظ أن

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

وإذن

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{and} \quad T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

مثـــال (٤) :

اعتبر V أى فضاء خطى . يسمى الراسم $T : V \rightarrow V$ المعرف بواسطة $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ **بالتحويل المحايد** على V. نترك تحقيق أن T خطى كتمرين .

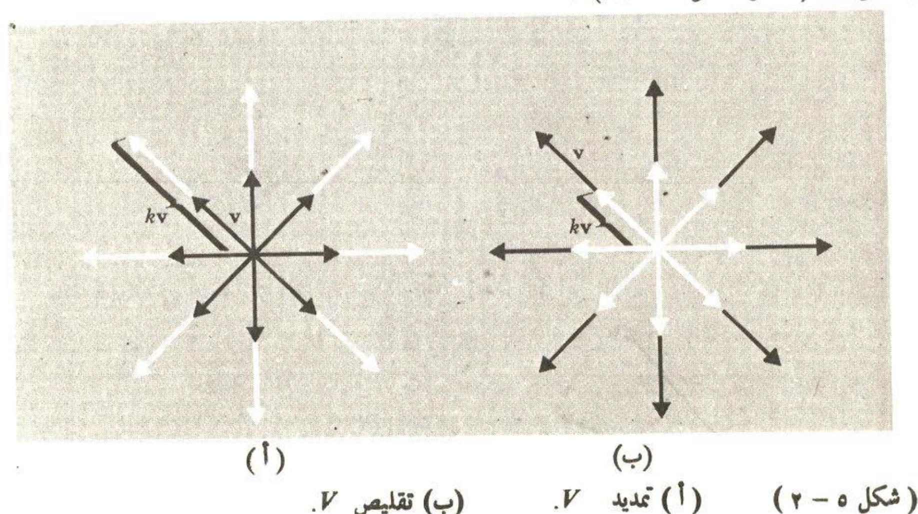
إذا كان ، كما فى مثالى ٢ ، ٤ $T : V \rightarrow V$ تحويلا خطياً من فضاء خطى V إلى نفسه ، فإن T يسمى **مؤثراً خطياً** على V .

مثـــال (٥) :

اعتبر V أى فضاء خطى و k أى عدد قياسى معين . سنترك كتمرين التأكد من أن الدالة $T : V \rightarrow V$ المعرفة بواسطة

$$T(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$$

هى مؤثر خطى على V. إذا كان $k > 1$ ، تسمى T **بتمديد** V ، إذا كان $0 < k < 1$ تسمى T **بتقليص** V . هندسيا فإن التمديد « يمط » كل متجه من V بالمعامل k والتقليص « يضغط » كل متجه بالمعامل k (أنظر شكل ٥ – ٢) .



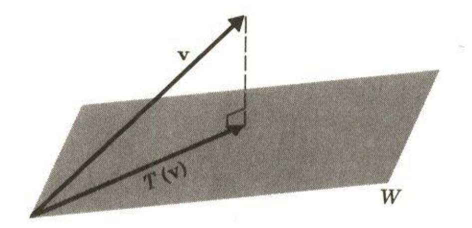
(شكل ٥ – ٢) (أ) تمديد V. (ب) تقليص V.

مثـــال (٦) :

اعتبر V أى فضاء ضرب داخلى ، وافرض أن W فضاء جزئياً ذا بعد منتهى من V له

$$S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$$

كأساس عيارى متعامد . اعتبر $T : V \rightarrow W$ هى الدالة التى ترسم المتجه $\mathbf{v}$ من V إلى مسقطه العمودى



(شكل ٥ – ٣)

على W (قسم ٤ – ٩) ، أى أن

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r$$

(أنظر شكل ٥ – ٣)

يسمى الراسم T **بالإسقاط العمودى للفضاء V على W** ، وينتج أنه خطياً من الخواص الأساسية للضرب الداخلى . فمثلا

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &\quad + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_r \rangle \mathbf{w}_r \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

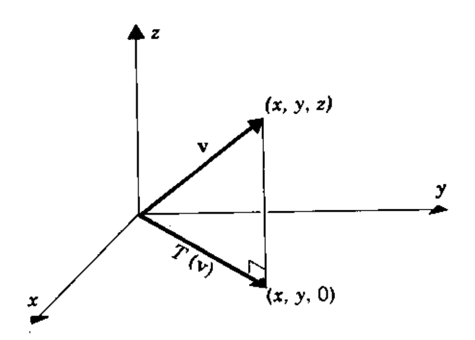
بالمثل $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$.

مثـــال (٧) :

كحالة خاصة من المثال السابق ، اعتبر $V = R^3$ له الضرب الداخلى الإقليدى . يكون المتجهات $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0)$ أساساً عيارياً متعامداً للمستوى xy . فإذا كان $\mathbf{v} = (x, y, z)$ أى متجه من R^3 ، فإن المسقط العمودى للمتجه R^3 على المستوى $x\,y$ يعطى بواسطة

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\ &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

(أنظر شكل ٥ – ٤)



(شكل ٥ – ٤)

مثـــال (٨) :

اعتبر V فضاء خطياً ذا n بعداً ، وإن $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ أساساً معيناً للفضاء V . من نظرية ٢٤ فى قسم ٤ – ١٠ يمكن كتابه أى متجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ بطريقة وحيدة على الصورة

$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$ و $\mathbf{v} = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n$

ومنها

$$(\mathbf{u})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ولكن

$$(\mathbf{v})_S = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{w}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\mathbf{w}_n$$

ومنها

$$k\mathbf{u} = (kc_1)\mathbf{w}_1 + (kc_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (kc_n)\mathbf{w}_n$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n)$$

وإذن يكون

$$(k\mathbf{u})_S = (kc_1, kc_2, \ldots, kc_n)$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S \quad \text{و} \quad (k\mathbf{u})_S = k(\mathbf{u})_S \tag{5.3}$$

بالمثل لمصفوفات الأحداثيات يكون لدينا

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S \quad \text{و} \quad [k\mathbf{u}]_S = k[\mathbf{u}]_S$$

لنفرض أننا اعتبر نا $T: V \to R^n$ هى الدالة التى ترسم المتجه $\mathbf{v}$ من V إلى متجه أحداثياته بالنسبة إلى S ، أى أن

$$T(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_S$$

فيكون بدلالة T ، تنص (5 – 3) على أن

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

وأيضاً

$$T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$$

لهذا فإن T تحويل خطى من V إلى R^n .

مثـال (٩) :

اعتبر V فضاء ضرب داخلى ، واعتبر $\mathbf{v}_0$ أى متجه معين من V . اعتبر $T : V \to R$ التحويل الذى يرسم أى متجه $\mathbf{v}$ إلى حاصل ضربه الداخلى مع $\mathbf{v}_0$ أى أن

$$T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$$

من خواص الضرب الداخلى

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

وأيضاً

$$T(k\mathbf{u}) = \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_0 \rangle = kT(\mathbf{u})$$

لهذا فإن T تحويل خطى .

مثـال (١٠) :

(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل .)

اعتبر $V = C\,[0, 1]$ هو الفضاء الخطى لجميع الدوال المتصلة ذات القيمة الحقيقية على الفترة $0 \le x \le 1$. واعتبر W هو الفضاء الجزئى من $C\,[0, 1]$ المكون من جميع الدوال التى مشتقتها الأولى متصلة فى الفترة $0 \le x \le 1$.

اعتبر $D : W \to V$ هو التحويل الذى يرسم $\mathbf{f}$ إلى مشتقتها ، أى أن

$$D(\mathbf{f}) = \mathbf{f}'$$

من خواص التفاضل ، يكون لدينا

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) + D(\mathbf{g})$$

وأيضاً

$$D(k\mathbf{f}) = kD(\mathbf{f})$$

إذن D تحويل خطى .

مثـال (١١) :

(للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل)

اعتبر $V = C[0, 1]$ كما فى المثال السابق واعتبر $J : V \to R$ معرفا بواسطة

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

فمثلا إذا كانت $f(x) = x^2$ فإن

$$J(\mathbf{f}) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

حيث أن

$$\int_0^1 (f(x) + g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$$

وأيضاً

$$\int_0^1 kf(x)\,dx = k\int_0^1 f(x)\,dx$$

لأى ثابت k ، فينتج أن

$$J(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = J(\mathbf{f}) + J(\mathbf{g})$$
$$J(k\mathbf{f}) = kJ(\mathbf{f})$$

إذن J تحويل خطى .

تمارين ٥ — ١

فى التمارين ١ - ٨ تعطى صيغة لدالة $F : R^2 \to R^2$. حدد فى كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

١ - $F(x, y) = (2x, y)$

٢ - $F(x, y) = (x^2, y)$

٣ - $F(x, y) = (y, x)$

٤ - $F(x, y) = (0, y)$

٥ - $F(x, y) = (x, y + 1)$

٦ - $F(x, y) = (2x + y, x - y)$

٧ - $F(x, y) = (y, y)$

٨ - $F(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

فى التمارين ٩ - ١٢ أعطيت صيغة لدالة $F : R^3 \to R^3$. حدد فى كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

٩ - $F(x, y, z) = (x, x + y + z)$

١٠ - $F(x, y, z) = (0, 0)$

١١ - $F(x, y, z) = (1, 1)$

١٢ - $F(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z)$

فى التمارين ١٣-١٦ أعطيت صيغة لدالة $F: M_{22} \to R$. حدد فى كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

١٣ - $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

١٤ - $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

١٥ - $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d$

١٦ - $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

فى التمارين ١٧ – ٢٠ أعطيت صيغة لدالة $F: P_2 \to P_2$. حدد فى كل تمرين ما إذا كانت F خطية .

١٧ – $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$

١٨ – $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$

١٩ – $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$

٢٠ – $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + a_1x + a_2x^2$

٢١ – اعتبر $F : R^2 \to R^2$ هى الدالة التى ترسم كل نقطة فى المستوى إلى انعكاسها حول محور y . أوجد صيغة للدالة F ثم أثبت أن F مؤثر خطى على R^2 .

٢٢ – اعتبر B مصفوفة معينة من النوع 2×3 . أثبت أن الدالة $T : M_{22} \to M_{23}$ المعرفة بواسطة $T(A) = AB$ هى تحويل خطى .

٢٣ – اعتبر $T : R^3 \to R^2$ هى تحويل مصفوفات ، وافرض أن

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ \text{and } T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix}.$$

(أ) أوجد المصفوفة .

(ب) أوجد $T\left(\begin{bmatrix}1\\3\\8\end{bmatrix}\right)$

(جـ) أوجد $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$

٢٤ – اعتبر $T : R^3 \to W$ هى مسقط R^3 العمودى على المستوى xz ، W .

(أ) أوجد صيغة للتحويل T .

(ب) أوجد $T(2, 7, -1)$.

٢٥ – اعتبر $T : R^3 \to W$ هى مسقط R^3 العمودى على المستوى W الذى معادلته $x + y + z = 0$

(أ) أوجد صيغة للتحويل T .

(ب) أوجد $T(3, 8, 4)$.

٢٦ – فى كل جزء اعتبر $T : R^2 \to R^2$ هو المؤثر الخطى الذى يدير كل متجه فى المستوى بزاوية θ أوجد $T(-1, 2)$ ، $T(x, y)$ عندما :

(أ) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ب) $\theta = \pi$ (جـ) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (د) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

٢٧ – أثبت أنه إذا كان $T: V \to W$ تحويل خطى فإن $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ لجميع المتجهات $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ من V .

٢٨ – اعتبر $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا للفضاء الخطى V واعتبر $T: V \to W$ تحويل خطى . أثبت أنه إذا كان $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) = \cdots = T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ ، فإن T هو التحويل الصفرى .

٢٩ – اعتبر $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا لفضاء خطى V واعتبر $T: V \to V$ مؤثر خطى . أثبت أنه إذا كان $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n$ فإن T هو التحويل المحايد .

٣٠* – اعتبر S أساساً لفضاء خطى ذى n بعدا . أثبت أنه إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ تكون فئة مستقلة خطيا من المتجهات فى V فإن متجهات الأحداثيات $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ تكون فئة مستقلة خطيا فى R^n والعكس بالعكس .

٣١ – باستخدام رموز تمرين ٣٠ أثبت أنه إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ تنشئ V ، فإن متجهات الأحداثيات $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ تنشئ R^n والعكس بالعكس .

٣٢ – أوجد أساساً لفضاء P_2 الجزئى الناشئ من المتجهات المعطاة

(أ) $-1 + x - 2x^2, \quad 3 + 3x + 6x^2, \quad 9$

(ب) $1 + x, \quad x^2, \quad -2 + 2x^2, \quad -3x$

(جـ) $1 + x - 3x^2, \quad 2 + 2x - 6x^2, \quad 3 + 3x - 9x^2$

(ارشاد : اعتبر S هو الأساس المعتاد للفضاء P_2 واستخدم متجهات الأحداثيات بالنسبة إلى S ، لاحظ تمرينى ٣٠ ، ٣١) .

٥ – ٢ خواص التحويلات الخطية : النواة والمدى

فى هذا القسم سنطور بعض الخواص الأساسية للتحويلات الخطية . وبصفة خاصة سنثبت أنه متى عرفنا صور متجهات الأساس بتأثير تحويل خطى . فيصبح ممكنا إيجاد صور بقية المتجهات فى الفضاء .

نظرية ١ : إذا كان $T: V \to W$ تحويلا خطياً ، فإن :

(أ) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(ب) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ لكل $\mathbf{v}$ من V .

(جـ) $T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ لكل $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{w}$ من V .

الإثبات : اعتبر $\mathbf{v}$ أى متجه من V . حيث أن $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ، فيكون

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

وهو ما يثبت (أ)

أيضاً $T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ ، وهو ما يثبت (ب)

وأخيرا $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$ ، ومنها

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= T(\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) + (-1)T(\mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w}) \quad ▮ \end{aligned}$$

تعريف : إذا كان $T : V \rightarrow W$ تحويلا خطيا فإن فئة متجهات V التي ترسمها T إلى $\mathbf{0}$ تسمى بالنواة (أو بالفضاء الصفرى) للتحويل T ، ويرمز لها بواسطة $\ker(T)$. فئة جميع المتجهات من W التي تكون صورا بتأثير T لمتجه واحد على الأقل من V تسمى بالمدى للتحويل T ، ويرمز لها بواسطة $R(T)$.

مثال (١٢) :

اعتبر $T : V \rightarrow W$ هو التحويل الصفرى. حيث أن T ترسم كل متجه إلى $\mathbf{0}$ ، فإن $\ker(T) = V$. حيث أن $\mathbf{0}$ هو الصورة الوحيدة الممكنة بتأثير T فإن $R(T)$ تتكون من المتجه الصفرى فقط .

مثال (١٣) :

اعتبر $T : R^n \rightarrow R^m$ هو الضرب فى

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

النواة للتحويل T تتكون من جميع

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

التي تكون متجهات حل للنظام المتجانس

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويتكون مدى T من المتجهات

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

بحيث يكون النظام

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

متوافق .

نظرية ٢ : إذا كان $T: V \to W$ تحويلا خطيا فإن :

(أ) نواة T هى فضاء جزئى من V .

(ب) مدى T هى فضاء جزئى من W .

الإثبات :

(أ) لإثبات أن $\ker(T)$ هو فضاء جزئى ، يجب أن نثبت أنه مغلق بالنسبة للجمع والضرب فى أعداد قياسية . اعتبر $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ متجهين فى $\ker(T)$ واعتبر k أى عدد قياسى . فيكون

$$T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$$
$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

إذن $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ فى $\ker(T)$. أيضاً

$$T(k\mathbf{v}_1) = kT(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

إذن $k\mathbf{v}_1$ فى $\ker(T)$.

(ب) اعتبر $\mathbf{w}_1$، $\mathbf{w}_2$ متجهين فى مدى T. لإثبات هذا الجزء يجب أن نثبت أن $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، $k\mathbf{w}_1$ من مدى T لأى عدد قياسى k ، أى أننا يجب أن نجد متجهين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ من V بحيث يكون $T(\mathbf{a}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ، $T(\mathbf{b}) = k\mathbf{w}_1$.

حيث أن $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ فى مدى T فيوجد متجهان $\mathbf{a}_1$ ، $\mathbf{a}_2$ من V بحيث يكون $T(\mathbf{a}_1) = \mathbf{w}_1$ ، $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_2$. اعتبر $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ ، $\mathbf{b} = k\mathbf{a}_1$ فيكون

$$T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

وأيضاً

$$T(\mathbf{b}) = T(k\mathbf{a}_1) = kT(\mathbf{a}_1) = k\mathbf{w}_1$$

وهذا ما يكمل الإثبات .

مثال (١٤) :

اعتبر $T: R^n \to R^m$ هو الضرب فى مصفوفة A من النوع $m \times n$. من مثال ١٣ تتكون نواة T من جميع حلول $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، إذ النواة هى فضاء الحلول لهذا النظام . أيضا من مثال ١٣ يتكون مدى T من جميع المتجهات $\mathbf{b}$ بحيث يكون النظام $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ متوافقا . إذا من نظرية ١٤ فى قسم ٤ - ٦ ، يكون مدى T هو فضاء الأعمدة للمصفوفة A .

اعتبر $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا للفضاء الخطى V وأن $T: V \to W$ تحويل خطى . إذا حدث وعلمنا صور متجهات الأساس ، أى

$$T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$$

فيمكننا الحصول على الصورة $T(\mathbf{v})$ لأى متجه $\mathbf{v}$ ، أولا بكتابة $\mathbf{v}$ بدلالة الأساس ، مثلا

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n$$

ثم استخدام العلاقة (5.2) من قسم ٥ - ١ لكتابة

$$T(\mathbf{v}) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_nT(\mathbf{v}_n)$$

وباختصار فإن التحويل الخطى يحدد تماما « بقيمه » عند أساس .

مثال (١٥) :

اعتبر الأساس $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ للفضاء R^3 حيث $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$

واعتبر أن $T : R^3 \to R^2$ هو تحويل خطى ، بحيث يكون

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0) \qquad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1) \qquad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

أوجد $T(2, -3, 5)$.

الحل: أولا نكتب $\mathbf{v} = (2 - 3, 5)$ كتركيبة خطية من $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$

فيكون

$$(2, -3, 5) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 1, 0) + k_3(1, 0, 0)$$

أو عند مساواة المركبات المناظرة

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 2 \\ k_1 + k_2 &= -3 \\ k_1 &= 5 \end{aligned}$$

وهذا يعطى $k_1 = 5$ ، $k_2 = -8$ ، $k_3 = 5$. لهذا

$$(2, -3, 5) = 5\mathbf{v}_1 - 8\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$$

إذا

$$\begin{aligned} T(2, -3, 5) &= 5T(\mathbf{v}_1) - 8T(\mathbf{v}_2) + 5T(\mathbf{v}_3) \\ &= 5(1, 0) - 8(2, -1) + 5(4, 3) \\ &= (9, 23) \end{aligned}$$

تعريف : إذا كان $T : V \to W$ تحويل خطى فإن بعد مدى T يسمى رتبة T وبعد النواة يسمى صفرية T .

مثال (١٦) :

اعتبر $T: R^2 \to R^2$ دوران الفضاء R^2 بزاوية $\pi/4$. من الواضح هندسيا أن مدى T هو كل R^2 ، وأن نواة T هى $\{0\}$. لهذا فإن رتبة $T = 2$ ، وصفريته $= 0$.

مثـال (١٧) :

اعتبر $T: R^n \to R^m$ ضربا فى مصفوفة A من النوع $m \times n$. فى مثال ١٤ رأينا أن مدى T هو فضاء أعمدة A . لهذا فإن رتبة T هى بعد فضاء أعمدة A وهو بالضبط رتبة A . باختصار فإن

رتبة (T) = رتبـة (A)

أيضاً فى مثال ١٤ ، رأينا أن نواة T هى فضاء الحل للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. لهذا فأن صفرية T هى البعد لفضاء الحل هذا .

تعطى النظرية التالية علاقة بين الرتبة والصفرية لتحويل خطى معرف على فضاء اتجاهى ذى بعد منتهى . سنرجئ الإثبات إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ٣ : (نظرية الأبعاد) : إذا كان $T: V \to W$ تحويلا خطيا من فضاء اتجاهى V من بعد n إلى فضاء اتجاهى W فإن

$n =$ (صفرية T) + (رتبـة T)

فى الحالة الخاصة عندما $V = R^n$ ، $W = R^m$ و $T : R^n \to R^m$ ضرب فى مصفوفة A من النوع $m \times n$. فإن نظرية الأبعاد تعطى النتيجة التالية :

(رتبـة T) $-$ (عدد أعمدة A) $=$

(5.4) (صفرية T) $=$ $n -$ (رتبـة T)

ولكن ذكرنا فى مثال ١٧ أن صفرية T هى البعد لفضاء الحل للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، وأن رتبة T هى رتبة المصفوفة A . لهذا تعطى (5.4) النظرية التالية .

نظرية ٤ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ ، فإن بعد فضاء الحل للنظام $Ax = \mathbf{0}$ هو $n -$ رتبـة (A)

مثـال (١٨) :

فى مثال ٣٥ بقسم ٤ – ٥ أثبتنا أن النظام المتجانس

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$

له فضاء حل ثنائى البعد ، بحل النظام وإيجاد أساس له .

حيث أن مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

لها خمسة أعمدة ، فينتج من نظرية ٤ أن رتبة A يجب أن تحقق

$$\text{رتبة } (A) - 5 = 2$$

ومنها رتبة $(A) = 3$. يمكن للقارئ أن يتأكد من هذه النتيجة باختزال A إلى الصورة الصفية المميزة وإثبات أن المصفوفة الناتجة لها ثلاثة صفوف غير صفرية .

مادة إختيارية :

إثبات نظرية ٣ : يجب أن نثبت أن

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = n$$

سنعطى الإثبات للحالة عندما $1 \leq \dim(\ker(T)) < n$ ونترك الحالتين $\dim(\ker(T)) = n$ و $\dim(\ker(T)) = 0$ كتمرينين. افرض $\dim(\ker(T)) = r$ واعتبر $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ أساساً للنواة . حيث أن $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ مستقلة خطيا فإن الجزء (جـ) من نظرية ٩ فى الباب الرابع ينص على وجود $n - r$ متجها ، $\mathbf{v}_{r+1}$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ بحيث يكون $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً للفضاء V لإكمال الإثبات سنثبت أن المتجهات $n - r$ فى الفئة $S = \{T(\mathbf{v}_{r+1}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ تكون أساساً لمدى T . ومن ثم ينتج أن

$$\dim(R(T)) + \dim(\ker(T)) = (n - r) + r = n$$

سنثبت أولا أن S تنشئ مدى T . إذا كان $\mathbf{b}$ أى متجه فى مدى T ، فإن $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$ لمتجه ما $\mathbf{v}$ من V . حيث أن $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساس للفضاء V فإن $\mathbf{v}$ يمكن كتابتها على الصورة

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

حيث أن $\mathbf{v}_1$ ، . . . ، $\mathbf{v}_r$ تقع فى نواة T فإن $T(\mathbf{v}_1) = \ldots = T(\mathbf{v}_r) = \mathbf{0}$ وإذن

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{v}) = c_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

لذا فإن S تنشئ مدى T .

أخيرا نثبت أن S فئة مستقلة خطيا ومن ثم تكون أساسا لمدى T . افرض أن تركيبة خطية ما من المتجهات فى S تكون المتجه الصفرى ، أى أن

$$k_{r+1}T(\mathbf{v}_{r+1}) + \cdots + k_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

يجب أن نثبت أن $k_{r+1} = \ldots = k_n = 0$. حيث أن T خطى فإن (5.5) يمكن إعادة كتابتها على الصورة .

$$T(k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

التى تنص على أن $k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$ فى نواة T . لهذا يمكن كتابة هذا المتجه كتركيبة خطية من متجهات الأساس $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ مثلا ،

$$k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + k_n\mathbf{v}_n = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

وإذن

$$k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r - k_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} - \cdots - k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

حيث أن $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ متجهات مستقلة خطيا فإن جميع الأعداد k هى الصفر وبصفة خاصة $k_{r+1} = \ldots = k_r = 0$ ، وهو ما يكمل الإثبات .

تمارين ٥ — ٢

١ – اعتبر $T : R^2 \to R^2$ ضربا فى

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

أى مما يلى فى $R(T)$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

٢ – اعتبر $T : R^2 \to R^2$ هو التحويل الخطى فى تمرين ١ . أى مما يلى فى $\ker(T)$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

٣ – اعتبر $T : R^4 \to R^3$ ضربا فى

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

أى مما يلى فى $R(T)$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

٤ – اعتبر $T : R^4 \to R^3$ هو التحويل الخطى فى تمرين ٣ . أى مما يلى فى $\ker(T)$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

٥ – اعتبر $T : P_2 \to P_3$ هو التحويل الخطى المعرف بواسطة $T(p(x)) = x\,p(x)$. أى مما يلى فى $\ker(T)$ ؟

(أ) x^2 (ب) 0 (جـ) $1 + x$

٦ – اعتبر $T : P_2 \to P_3$ هو التحويل الخطى فى تمرين ٥ . أى مما يلى فى $R(T)$ ؟
(أ) $x + x^2$ (ب) $1 + x$ (جـ) $3 - x^2$

٧ – اعتبر V أى فضاء خطى واعتبر أن $T : V \to V$ معرف بواسطة $T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$.
(أ) ما هى نواة T ؟
(ب) ما هو مدى T ؟

٨ – أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطى فى تمرين ١ .

٩ – أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطى فى تمرين ٥ .

١٠ – اعتبر V فضاء خطيا ذو بعد n . أوجد الرتبة والصفرية للتحويل الخطى $T : V \to V$ المعرف بواسطة
(أ) $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ (ب) $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (جـ) $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$

١١ – اعتبر الأساس $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ للفضاء R^3 حيث $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 5, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 10)$.
أوجد صيغة للتحويل الخطى $T : R^3 \to R^2$ الذى يحقق ، $T(\mathbf{v}_1) = (1,0)$ ، $T(\mathbf{v}_2) = (1,0)$
و $T(\mathbf{v}_3) = (0,1)$. احسب $T(1, 1, 1)$.

١٢ – أوجد التحويل الخطى $T : P_2 \to P_2$ الذى يحقق $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - x^2$, $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$,
احسب $T(2 - 2x + 3x^2)$.

١٣ – فى كل جزء استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد صفرية T .
(أ) $T : R^5 \to R^7$ ورتبته 3 .
(ب) $T : P_4 \to P_3$ ورتبته 1 .
(جـ) مدى $T : R^6 \to R^3$ هو R^3 .
(د) $T : M_{22} \to M_{22}$ ورتبته 3 .

١٤ – اعتبر A مصفوفة 7×6 بحيث يكون النظام $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ له فقط الحل التافه . واعتبر $T : R^6 \to R^7$ ضربا فى A . أوجد رتبة وصفرية T .

١٥ – اعتبر A مصفوفة من النوع 5×7 ورتبتها 4 .
(أ) ما هو بعد فضاء الحل للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ؟
(ب) هل النظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ متوافق لجميع المتجهات $\mathbf{b}$ من R^5 ؟ اشرح .

فى التمارين ١٦ – ١٩ اعتبر T ضربا فى المصفوفة المعطاة . أوجد :
(أ) أساس لمدى T . (ب) أساس لنواة T . (جـ) رتبة وصفرية T .

١٦ – $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

١٧ – $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

١٨ – $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

١٩ – $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

٢٠ – اعتبر $T : R^3 \rightarrow V$ تحويلا خطيا من R^3 إلى أى فضاء خطى . أثبت أن نواة T هى إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل ، أو نقطة الأصل فقط ، أو R^3 بأكله .

٢١ – اعتبر $T : V \rightarrow R^3$ تحويلا خطيا من أى فضاء خطى إلى R^3 . أثبت أن مدى T هو إما مستقيم مار بنقطة الأصل ، أو مستوى مار بنقطة الأصل أو نقطة الأصل ، فقط أو R^3 بأكله .

٢٢ – اعتبر $T : R^3 \leftarrow R^3$ ضربا فى

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أثبت أن نواة T هى خط مستقيم مار بنقطة الأصل وأوجد المعادلات البارامترية له .

(ب) أثبت أن مدى T هو مستوى مار بنقطة الأصل وأوجد معادلة له .

٢٣ – أثبت : إذا كان $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساسا للفضاء V وكانت $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ ، . . . ، $\mathbf{w}_n$ متجهات فى W ، ليست بالضرورة مختلفة ، فيوجد تحويل خطى $T : V \rightarrow W$ بحيث يكون $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$

٢٤ – أثبت نظرية الأبعاد فى الحالتين :

(أ) $\dim(\ker(T)) = 0$.

(ب) $\dim(\ker(T)) = n$.

٢٥ – اعتبر $T : V \rightarrow V$ مؤثرا خطيا على فضاء خطى V ذى بعد منتهى . أثبت أن $R(T) = V$ إذا وفقط إذا كان $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

٢٦ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) . اعتبر $D : P_3 \rightarrow P_2$ هو التحويل بالتفاضل $D(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$. صف نواة D .

٢٧ – (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) اعتبر $J : P_1 \rightarrow R$ هو التحويل بالتكامل $J(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$. صف نواة $\mathbf{J}$.

٥ — ٣ مصفوفات التحويلات الخطية

سنبين فى هذا القسم أن أى تحويل خطى على فضاء خطى ذى بعد منتهى يمكن أن ينظر إليه كتحويل مصفوفات . وسيمكننا ما نفعله هنا من الاستفادة بمعلوماتنا عن تحويلات المصفوفات لدراسة تحويلات خطية أخرى أعم .

سنثبت أولا أن كل تحويل خطى من R^n إلى R^m هو تحويل مصفوفات وبدقة أكثر سنثبت أنه إذا كان $T : R^n \to R^m$ أى تحويل خطى فيمكننا إيجاد مصفوفة A من النوع $m \times n$ بحيث تكون T ضربا فى A. لإثبات هذا ، اعتبر

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

هو الأساس المعتاد للفضاء R^n ، واعتبر A هى المصفوفة من النوع $m \times n$ التى لها

$$T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$$

كمتجهات أعمدة (سنفترض فى هذا القسم أن جميع المتجهات قد عبر عنها على صورة مصفوفات) فمثلا إذا كان $T : R^2 \to R^2$ معطى بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{matrix}$$

وبصورة أعم ، إذا كان

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{matrix}$$

سنثبت أن التحويل الخطى $T : R^n \to R^m$ هو ضرب فى A. لإثبات هذا لاحظ أولا أن

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

لذا من كون T خطيا

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \tag{5.7}$$

ومن الناحية الأخرى

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \tag{5.8}$$

مقارنة (5.7) ، (5.8) تعطى أن $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. أى أن T هو ضرب فى A .

سنشير إلى المصفوفة A فى (5.6) بالمصفوفة المعتادة للتحويل T .

مثـال (١٩) :

أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل $T : R^3 \to R^4$ المعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

الحـل :

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام $T(\mathbf{e}_1)$ ، $T(\mathbf{e}_2)$ ، $T(\mathbf{e}_3)$ كمتجهات أعمدة ، نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

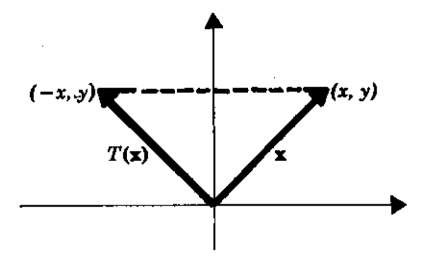
كاختيار ، لاحظ أن

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

وهو ما يتفق مع الصيغة المعطاة للتحويل T .

مثال (٢٠) :

اعتبر $T : R^2 \rightarrow R^2$ هو التحويل الخطى الذى يرسم كل متجه إلى صورته المتماثلة بالنسبة إلى محور y (شكل ٥ – ٥) . أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل T .



(شكل ٥ – ٥)

الحل :

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باستخدام $T(\mathbf{e}_1)$ ، $T(\mathbf{e}_2)$ كمتجهات أعمدة نحصل على المصفوفة المعتادة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكاختبار ، اعتبر

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

هو أى متجه فى R^2 ، فيكون

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

وإذن $A\mathbf{x}$ هو صورة $\mathbf{x}$ المتماثلة بالنسبة إلى محور y .

سنثبت بعد ذلك أنه إذا كان V، W أى فضاءين خطيين لهما بعدان منتهيان (ليس بالضرورة R^n، R^m) فبقليل من الفطنة يمكن النظر إلى أى تحويل خطى $T: V \to W$ على أنه تحويل مصفوفات . الفكرة الأساسية هى اختيار أساسين للفضاءين V ، W ثم التعامل مع مصفوفات الإحداثيات بالنسبة إلى هذين الأساسين بدلا من المتجهات نفسها . وبتحديد أكثر ، افرض أن V من بعد n وأن W من بعد m . إذا اخترنا الأساسين B ، B' للفضاءين V ، W على الترتيب فتكون مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{x}]_B$ لأى متجه $\mathbf{x}$ من V متجها فى R^n ومصفوفة الأحداثيات $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ ستكون متجها ما فى R^m . لذا فى عملية رسم $\mathbf{x}$ إلى $T(\mathbf{x})$ فإن التحويل الخطى T « ينشئ » راسما من R^n إلى R^m بارسال $[\mathbf{x}]_B$ إلى $[T(\mathbf{x})]_{B'}$. يمكن إثبات أن هذا الراسم المنشأ يكون دائما تحويلا خطيا وعليه يمكن إنجازه

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \xrightarrow[\text{مباشر}]{\text{حساب}} & T(\mathbf{x}) \\ \downarrow (1) & & \uparrow (3) \\ [\mathbf{x}]_B & \xrightarrow[(2)]{\text{بالضرب فى } A} & [T(\mathbf{x})]_{B'} \end{array}$$

(شكل ٥ - ٦)

باستخدام المصفوفة المعتادة A لهذا التحويل ، أى أن

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'} \qquad (5.9)$$

إذا استطعنا بطريقة ما إيجاد المصفوفة A فيمكن ، كما هو مبين فى شكل ٥ - ٦ ، حساب $T(\mathbf{x})$ فى ثلاث خطوات بالعملية التالية غير المباشرة :

(١) احسب مصفوفة الأحداثيات $[\mathbf{x}]_B$

(٢) اضرب $[\mathbf{x}]_B$ من اليسار فى A للحصول على $[T(\mathbf{x})]_{B'}$

(٣) كون $T(\mathbf{x})$ من مصفوفة أحداثياته $[T(\mathbf{x})]_{B'}$

يوجد سببان أساسيان لأهمية هذه العملية غير المباشرة . أولا فهى تمدنا بطريقة ذات كفاءة لإجراء التحويلات الخطية على الحاسبات العددية . والسبب الثانى نظرى ولكن له نتائج تطبيقية هامة . تعتمد المصفوفة A على الأساسين B ، B' . عادة أن الشخص يجب أن يختار B ، B' ليجعل حساب مصفوفات الأحداثيات سهلا قدر الإمكان ، مثلا بالإكثار من العناصر الصفرية . عند إتمام هذا بالطريقة الصحيحة فيمكن للمصفوفة A أن تقدم معلومات هامة عن التحويل الخطى وسنتابع هذه الفكرة فى أقسام آتية .

نعود الآن إلى مسألة إيجاد مصفوفة A تحقق (5.9). افرض أن V فضاء من بعد n وله الأساس $B = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ، وأن W فضاء من بعد m وله الأساس $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. نبحث عن مصفوفة من النوع $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بحيث تتحقق (5.9) لجميع المتجهات $\mathbf{x}$ من V. وبصفة خاصة عندما يكون $\mathbf{x}$ هو متجه أساس $\mathbf{u}_1$ فريد

$$A[\mathbf{u}_1]_B = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \tag{5.10}$$

ولكن

$$[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

لهذا

$$A[\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

وإذن (5.10) تحتم أن

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_1)]_{B'}$$

أى أن العمود الأول من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(\mathbf{u}_1)$ بالنسبة إلى الأساس B' . بالمثل إذا اعتبرنا $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ فى (5.9) نحصل على

$$A[\mathbf{u}_2]_B = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}$$

ولكن

$$[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

لهذا

$$A[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$$

وإذن

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}$$

أى أن العمود الثانى من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(\mathbf{u}_2)$ بالنسبة إلى الأساس B' . بالاستمرار على هذا المنوال سنجد أن العمود j من A هو مصفوفة الأحداثيات للمتجه $T(\mathbf{u}_j)$ بالنسبة إلى B' . المصفوفة الوحيدة A التى حصلنا عليها بهذه الطريقة تسمى **بمصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين B ، B'** . شكليا يمكننا أن نرمز لهذه المصفوفة بواسطة

$$A = \underset{B',B}{\overset{\text{مصفوفة } T}{\text{بالنسبة إلى الأساسين}}} = \Big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \Big]$$

مثال (٢١) :

اعتبر $T : P_1 \to P_2$ هو التحويل الخطى المعرف بواسطة

$$T(p(x)) = xp(x)$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الإساسين

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \qquad \text{and} \qquad B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$$

حيث

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x; \quad \mathbf{u}'_1 = 1, \quad \mathbf{u}'_2 = x, \quad \mathbf{u}'_3 = x^2$$

الحـــل : من صيغة T نحصل على

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$
$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

بالنظر يمكننا تحديد مصفوفات إحداثيات $T(\mathbf{u}_1)$ ، $T(\mathbf{u}_2)$ بالنسبة إلى B' . وهما

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذا مصفوفة T بالنسبة إلى B ، B' هى

$$A = \Big[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} \Big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثـــال (٢٢) :

اعتبر $T : P_1 \to P_2$ ، B ، B' كما فى مثال (٢١) واعتبر أن

$$\mathbf{x} = 1 - 2x$$

استخدم المصفوفة التى حصلنا عليها فى مثال (٢١) لحساب $T(\mathbf{x})$ بالطريقة غير المباشرة فى شكل ٥ — ٦ .

الحـــل : بالنظر فإن مصفوفة الأحداثيات للمتجه $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى B هى

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$[T(\mathbf{x})]_{B'} = A[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$T(\mathbf{x}) = 0\mathbf{u}'_1 + 1\mathbf{u}'_2 - 2\mathbf{u}'_2 = 0(1) + 1(x) - 2(x^2)$$
$$= x - 2x^2$$

وللتأكد لاحظ أن الحساب المباشر للمتجه $T(\mathbf{x})$ هو

$$T(\mathbf{x}) = T(1 - 2x) = x(1 - 2x) = x - 2x^2$$

وهو ما يتفق مع النتيجة التى حصلنا عليها بالطريقة غير المباشرة .

مثـــال (٢٣) :

إذا كان $T : R^n \to R^m$ تحويلا خطياً وكان B، B' هما الأساسان المعتادان للفضائين R^n ، R^m بالترتيب فإن مصفوفة T بالنسبة إلى B، B' هى بالضبط المصفوفة المعتادة للتحويل T ، التى نوقشت فى بداية هذا القسم. (نترك التحقق من هذا كتمرين) .

فى الحالة الخاصة عندما $V = W$ (لهذا يكون $T : V \to V$ مؤثراً خطياً) فن المعتاد أن نأخذ $B = B'$ عند تكوين مصفوفة للمؤثر T . وتسمى المصفوفة الناتجة **بمصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B** .

مثـــال (٢٤) :

إذا كان $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ هو أى أساس لفضاء خطى V منتهى البعد وكان $I : V \to V$ هو المؤثر المحايد على V فإن $I(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, I(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, \ldots, I(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$

لهـــذا

$$[I(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, [I(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, [I(\mathbf{u}_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن مصفوفة المؤثر المحايد بالنسبة إلى أى أساس هى مصفوفة الوحدة من النوع $n \times n$.

مثـــال (٢٥) :

اعتبر $T: R^2 \to R^2$ هو المؤثر الخطى المعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad و \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الحل : من تعريف T

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_1 \qquad و \qquad T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{u}_2$$

إذا

$$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad و \qquad [T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن مصفوفة T بالنسبة إلى B هى

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تمارين ٥ ــ ٣

١ – أوجد المصفوفة المعتادة لكل من المؤثرات الخطية التالية :

(أ) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ (ب) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(جـ) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (د) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4x_1 \\ 7x_2 \\ -8x_3 \end{bmatrix}\right)$

٢ – أوجد المصفوفة المعتادة لكل من التحويلات الخطية التالية :

(أ) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ (ب) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}$

(جـ) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (د) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$

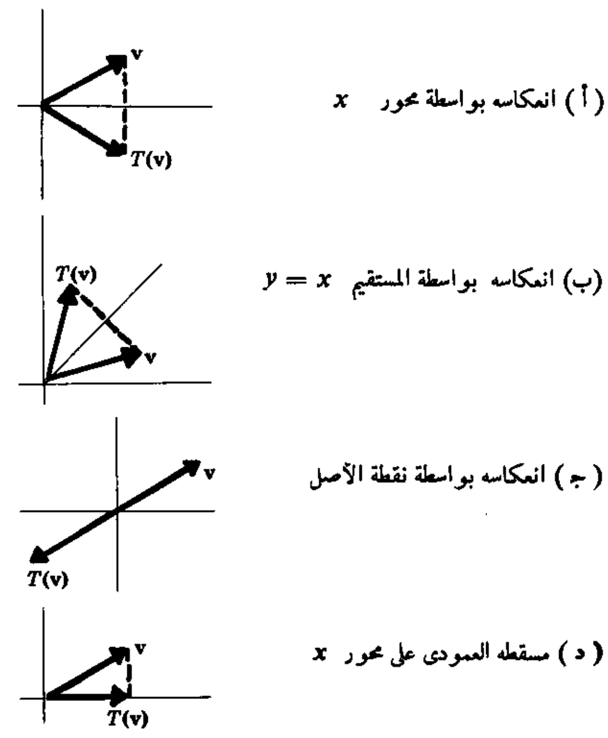
٣ – أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطى $T : R^2 \to R^2$ والذى يرسم أى متجه $\mathbf{v} = (x, y)$ إلى :

(أ) انعكاسه بواسطة محور x

(ب) انعكاسه بواسطة المستقيم $y = x$

(جـ) انعكاسه بواسطة نقطة الأصل

(د) مسقطه العمودى على محور x



٤ – فى كل جزء من تمرين (٣) استخدم المصفوفة التى حصلت عليها لحساب $T(2, 1)$. تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجهين $(2,1)$ ، $T(2,1)$.

٥ – أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطى $T : R^3 \to R^3$ الذى يرسم المتجه $\mathbf{v} = (x, y, z)$ إلى :

(أ) انعكاسه بواسطة مستوى xy .
(ب) انعكاسه بواسطة مستوى xz .
(جـ) انعكاسه بواسطة مستوى yz .

٦ – فى كل جزء من تمرين (٥) ، استخدم المصفوفة التى حصلت عليها الحساب $T(1, 1, 1)$. تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجهين $(1, 1, 1)$ ، $T(1, 1, 1)$.

٧ – أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطى $T : R^3 \to R^3$ الذى :

(أ) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور z (بالنظر إلى أسفل محور z الموجب فى اتجاه نقطة الأصل) .

(ب) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x (بالنظر من على محور x الموجب فى اتجاه نقطة الأصل) .

(ج) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y (بالنظر من على محور y الموجب فى اتجاه نقطة الأصل) .

٨ – اعتبر $T : P_2 \to P_1$ هو التحويل الخطى المعرف بواسطة

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين المعتادين للفضاءين P_2 ، P_1 .

٩ – اعتبر $T : R^2 \to R^3$ معرفاً بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ، $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ، حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التى حصلت عليها فى (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

١٠ – اعتبر $T : R^3 \to R^3$ مؤثراً معرفاً بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ، حيث

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التى حصلت عليها فى (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

١١ – اعتبر $T : P_2 \to P_4$ هو التحويل الخطى المعرف بواسطة $T(p(x)) = x^2p(x)$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ ، B' ، حيث $\mathbf{p}_1 = 1+x^2, \mathbf{p}_2 = 1+2x+3x^2, \mathbf{p}_3 = 4+5x+x^2$ وحيث B' هو الأساس المعتاد للفضاء P_4.

(ب) استخدم المصفوفة التى حصلت عليها فى (أ) لحساب $T(-3 + 5x - 2x^2)$.

١٢ – اعتبر $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ واعتبر أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

هى مصفوفة المؤثر $T : R^2 \to R^2$ بالنسبة إلى الأساس $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(أ) أوجد $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ ، $[T(\mathbf{v}_2)]_B$.

(ب) أوجد $T(\mathbf{v}_1)$ ، $T(\mathbf{v}_2)$.

(جـ) أوجد $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

١٣ – اعتبر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ هى مصفوفة التحويل $T : R^4 \to R^3$ بالنسبة إلى الأساسين $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ ، $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ، حيث

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$ و $[T(\mathbf{v}_4)]_{B'}$

(ب) أوجد $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$, $T(\mathbf{v}_3)$ و $T(\mathbf{v}_4)$

(جـ) أوجد $T\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

١٤ – اعتبر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ هى مصفوفة المؤثر $T : P_2 \to P_2$ بالنسبة إلى الأساس

$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ حيث $\mathbf{v}_1 = 3x + 3x^2, \mathbf{v}_2 = -1 + 3x + 2x^2, \mathbf{v}_3 = 3 + 7x + 2x^2$

(أ) أوجد $[T(\mathbf{v}_1)]_B$ ، $[T(\mathbf{v}_2)]_B$ و $[T(\mathbf{v}_3)]_B$.

(ب) أوجد $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)$ و $T(\mathbf{v}_3)$.

(جـ) أوجد $T(1 + x^2)$.

١٥ - أثبت أنه إذا كان $T : V \to W$ هو التحويل الصفرى (مثال ٣) فإن مصفوفة T بالنسبة إلى أى أساسين للفضاءين V ، W هى مصفوفة صفرية .

١٦ - أثبت أنه إذا كان التحويل $T : V \to V$ تقليصاً أو تمديداً للفضاء V (مثال ٥) فإن مصفوفة T بالنسبة إلى أى أساس للفضاء V هى مصفوفة قطرية .

١٧ - اعتبر $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ أساساً لفضاء خطى V . أوجد المصفوفة بالنسبة إلى B للمؤثر الخطى $T : V \to V$ المعرف بواسطة $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_4, T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_1$.

١٨ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) اعتبر $D : P_2 \to P_2$ هو مؤثر التفاضل $D(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ فى الجزأين (أ) ، (ب) أوجد مصفوفة D بالنسبة إلى الأساس $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

(أ) $\mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = x, \mathbf{p}_3 = x^2$

(ب) $\mathbf{p}_1 = 2, \mathbf{p}_2 = 2 - 3x, \mathbf{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$

(جـ) استخدم مصفوفة الجزء (أ) لحساب $D(6 - 6x + 24x^2)$

(د) كرر المطلوب فى الجزء (جـ) باستخدام مصفوفة الجزء (ب) .

١٩ - (للقراء الذين درسوا حساب التفاضل والتكامل) . فى كل جزء ، $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ هو أساس فضاء جزئى V من الفضاء الخطى للدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقى . أوجد المصفوفة بالنسبة إلى B لمؤثر التفاضل $D : V \to V$.

(أ) $\mathbf{f}_1 = 1, \mathbf{f}_2 = \sin x, \mathbf{f}_3 = \cos x$

(ب) $\mathbf{f}_1 = 1, \mathbf{f}_2 = e^x, \mathbf{f}_3 = e^{2x}$

(جـ) $\mathbf{f}_1 = e^{2x}, \mathbf{f}_2 = xe^{2x}, \mathbf{f}_3 = x^2e^{2x}$

٥ ــ ٤ الاتفــاق

تعتمد مصفوفة المؤثر الخطى $T : V \to V$ على الأساس المختار للفضاء V . وواحدة من المسائل الأساسية فى الجبر الخطى هى اختيار أساساً للفضاء V بحيث يجعل مصفوفة T بسيطة قدر الإمكان . غالباً نبدأ فى حل هذه المسألة أولا بإيجاد مصفوفة T بالنسبة إلى أساس « بسيط » مثل الأساس المعتاد . وعادة فإن هذا الاختيار لايعطى أبسط مصفوفة للمؤثر T ولهذا فإننا بعد ذلك نبحث عن طريقة لتغيير الأساس لكى نبسط المصفوفة . ولكى نحل مثل هذه المسألة يجب أن نعرف كيف يؤثر تغيير الأساس على مصفوفة المؤثر الخطى ، سندرس هذه المسألة فى هذا القسم .

والنظرية التالية هى مفتاح النتائج فى هذا القسم .

نظرية ٥ : اعتبر $T: V \to V$ مؤثراً خطياً فى فضاء خطى V منتهى البعد . إذا كانت A هى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B و A' هى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B' ، فإن

$$A' = P^{-1}AP \tag{5.11}$$

حيث P هى مصفوفة الانتقال من B' إلى B .

لإثبات هذه النظرية سيكون من المناسب أن نصف العلاقة

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

تصويرياً بكتابة

$$\mathbf{u} \xrightarrow{A} \mathbf{v}$$

حيث أن A هى مصفوفة T بالنسبة إلى B و A' هى مصفوفة T بالنسبة إلى B' فإن العلاقتين التاليتين تتحققان لجميع $\mathbf{x}$ من V .

$$A[\mathbf{x}]_B = [T(\mathbf{x})]_B$$

وأيضاً

$$A'[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

ويمكن كتابتهما هكذا

$$[\mathbf{x}]_B \xrightarrow{A} [T(\mathbf{x})]_B$$
$$[\mathbf{x}]_{B'} \xrightarrow{A'} [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{5.12}$$

لمعرفة كيف ترتبط المصفوفتان A ، A' . اعتبر P هى مصفوفة التحويل من الأساس B' إلى الأساس B فتكون P^{-1} هى مصفوفة الانتقال من B إلى B' . وإذن

$$P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$$

وأيضاً

$$P^{-1}[T(\mathbf{x})]_B = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

ويمكن كتابتهما هكذا

$$[\mathbf{x}]_{B'} \xrightarrow{P} [\mathbf{x}]_B \tag{5.13}$$

وأيضا

$$[T(\mathbf{x})]_B \xrightarrow{P^{-1}} [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

ويمكن لضغط الحجم أن نربط العلاقتين (5.12) ، (5.13) معاً فى شكل واحد كما يلى :

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{x}]_B & \xrightarrow{A} & [T(\mathbf{x})]_B \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ [\mathbf{x}]_{B'} & \xrightarrow{A'} & [T(\mathbf{x})]_{B'} \end{array}$$

يوضح هذا الشكل أنه توجد طريقتان لحصول على المصفوفة $[T(\mathbf{x})]_{B'}$ من المصفوفة $[\mathbf{x}]_{B'}$. يمكننا أن نأخذ المسار الأسفل عبر الشكل ، وهذا يعنى

$$A'[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{5.14}$$

أو يمكن أن نذهب إلى أعلى من الطرف الأيسر ثم عبر القمة ثم أسفل الطرف الأيمن ، وهذا يعنى

$$P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{B'} = [T(\mathbf{x})]_{B'} \tag{5.15}$$

ينتج من (5.14) ، (5.15) أن

$$P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{B'} = A'[\mathbf{x}]_{B'} \tag{5.16}$$

لجميع قيم $\mathbf{x}$ من V . ينتج من (5.16) والجزء (b) من تمرين (١١) أن

$$P^{-1}AP = A'$$

وهذا يثبت نظرية (٥) .

تحـــذير : عند تطبيق نظرية (٥) من السهل نسيان ما إذا كانت P هى مصفوفة الانتقال من B إلى B' (خطأ) أو من B' إلى B (صواب) . وقد يساعدنا أن نسمى B الأساس القديم ، B' الأساس الجديد ، A المصفوفة القديمة ، A' المصفوفة الجديدة . حيث أن P هى مصفوفة الانتقال من B' إلى B ، P^{-1} هى مصفوفة الانتقال من B إلى B' فإن (5.11) يمكن التعبير عنها هكذا :

المصفوفة الجديدة = P (المصفوفة القديمة) P^{-1}

حيث P هى مصفوفة الانتقال من الأساس الجديد إلى الأساس القديم .

مثـــال (٢٦) :

اعتبر $T : R^2 \to R^2$ معرفاً بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر T ، أى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ حيث

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبعد ذلك استخدم نظرية (٥) لتحويل هذه المصفوفة إلى مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ حيث

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحـــل : من صيغة T

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وأيضاً

$$T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

وعليه فصفوفة T المتادة هى

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}$$

نحتاج بعد ذلك إلى مصفوفة الانتقال من B' إلى B . ولمصفوفة الانتقال هذه يجب أن نجد مصفوفى الأحداثيات لمتجهى الأساس B' بالنسبة إلى الأساس B . بالنظر نجد

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

وإذن

$$[\mathbf{u}_2]_B = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad , \quad [\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

لذا فإن مصفوفة الانتقال من B' إلى B هى

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

ويمكن للقارىء أن يتأكد من أن

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

إذا من نظرية (٥) تكون مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس B' هى

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}.$$

يوضح هذا المثال أن الأساس المعتاد للفضاء الخطى لاينتج بالضرورة أبسط مصفوفة للمؤثر الخطى . فى هذا المثال لم تكن المصفوفة المعتادة

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}$$

سهلة التركيب مثل المصفوفة

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} \tag{5.17}$$

بالنسبة إلى الأساس B' . المصفوفة (5.17) هى مثال للمصفوفة القطرية ، أى أنها مصفوفة مربعة كل مكوناتها غير القطرية هى الصفر . للمصفوفات القطرية الكثير من الخواص المرغوب فيها . فمثلا القوة k لمصفوفة قطرية

$$D = \begin{bmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & d_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1{}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2{}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n{}^k \end{bmatrix}$$

فلرفع مصفوفة قطرية إلى القوة k نحتاج فقط لرفع كل عنصر قطرى إلى القوة k . أما بالنسبة إلى المصفوفة غير القطرية فإننا نحتاج إلى حسابات أكثر كثيراً لحصول على القوة k للمصفوفة . وللمصفوفات القطرية أيضاً خواص مفيدة أخرى .

سنناقش فى الباب القادم مسألة إيجاد الأساسات التى تنتج مصفوفات قطرية للمؤثرات الخطية .

وتعتبر نظرية (٥) دافعاً للتعريف التالى .

تعريف : إذا كانت A ، B مصفوفتين مربعتين فنقول أن B **متفقة مع** A إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $B = P^{-1}AP$.

لاحظ أن المعادلة $B = P^{-1}AP$ يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$A = PBP^{-1}$ أو $A = (P^{-1})^{-1}\, B\, P^{-1}$

بوضع $Q = P^{-1}$ يعطى

$$A = Q^{-1}BQ$$

وهى تخبرنا بأن A متفقة مع B . لهذا فإن B تكون متفقة مع A إذا وفقط إذا كانت A متفقة مع B . ومن ثم سنقول عادة ببساطة أن A ، B **متفقتان** .

وبهذا الاصطلاح تنص نظرية (٥) أن أى مصفوفتين تمثلان نفس المؤثر الخطى $T : V \to V$ بالنسبة إلى أساسين مختلفين تكونان متفقتين .

تمارين ٥ — ٤

فى التمارين (١ — ٧) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى B ، واستخدم نظرية (٥) لحساب مصفوفة T بالنسبة إلى B' .

١ — $T : R^2 \to R^2$ يعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ، $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

٢ – $T : R^2 \to R^2$ يعرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ، $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ، حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

٣ – $T : R^2 \to R^2$ هو الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 45° و B ، B' الأساسان فى تمرين (١) .

٤ – $T : R^3 \to R^3$ معرف بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$$

B هو الأساس المعتاد للفضاء R^3 ، $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ، حيث

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٥ – $T : R^3 \to R^3$ هو المسقط العمودى على مستوى xy ، B و B' هما كما فى تمرين (٤) .

٦ – $T : R^2 \to R^2$ معرف بواسطة $T(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}$ و B ، B' ، هما الأساسان فى تمرين (٢) .

٧ – $T : P_1 \to P_1$ معرف بواسطة $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x + 1)$ ، $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$
$B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ حيث $\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \mathbf{q}_1 = 2, \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$

٨ – أثبت أنه إذا كانت A ، B مصفوفتين متفقتين فإن $\det(A) = \det(B)$.

٩ – أثبت أن المصفوفات المتفقة لها نفس الرتبة .

١٠ – أثبت أنه إذا كانت A ، B مصفوفتين متفقتين فإن A^2 ، B^2 أيضاً تكونان متفقتين . وبصورة أعم أثبت أن A^k ، B^k تكونان متفقتين ، حيث k أى عدد صحيح موجب .

١١ – اعتبر C ، D مصفوفتين من النوع $m \times n$ أثبت أن :

(أ) إذا كان $C\mathbf{x} = D\mathbf{x}$ لكل $\mathbf{x}$ من R^n ، فإن $C = D$.

(ب) إذا كان $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ أساساً لفضاء خطى V و كان $C[\mathbf{x}]_B = D[\mathbf{x}]_B$ لكل $\mathbf{x}$ من V ، فإن $C = D$.

٦ - القيم الذاتية - المتجهات الذاتية

٦ ــ ١ القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

فى كثير من المسائل فى العلوم والرياضيات يعطى مؤثر خطى $T : V \to V$ ويكون من الاهمية تعيين تلك الأعداد القياسية λ بحيث يكون للمعادلة $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ حل غير صفرى . سنناقش هذه المسألة فى هذا القسم ، وفى أقسام تالية سنبحث بعض تطبيقاتها .

تعريف : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ ، فالمتجه غير الصفرى $\mathbf{x}$ فى R^n يسمى **متجهاً ذاتياً** للمصفوفة A إذا كانت $A\mathbf{x}$ مضاعفاً قياسياً للمتجه $\mathbf{x}$ بمعنى أن

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

لعدد قياسى λ. العدد القياسى λ يسمى**متجها ذاتياً** للمصفوفة A ويقال أن $\mathbf{x}$ متجه ذاتىمناظرللعدد القياسىλ.

القيم الذاتية لمصفوفة A تسمى أيضاً القيم الخاصة أو القيم المميزة أو الجذور الكامنة للمصفوفة A .

مثال (١) :

المتجه $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتى للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

يناظر القيمة الذاتية $\lambda = 3$ إذ أن

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

يوجد للقيمالذاتية والمتجهات الذاتية تفسير هندسىمفيد فى R^2 ، R^3. إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A مناظرة للمتجه $\mathbf{x}$ ، فإن $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ، ولذا فالضرب فى A يمدد $\mathbf{x}$ أو يقلص $\mathbf{x}$ أو يعكس اتجاه $\mathbf{x}$ ، وذلك يتوقف على قيمة λ (أنظر شكل ٦ - ١) .

لإيجاد القيم الذاتية لمصفوفة A من النوع $n \times n$ نكتب $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ على الصورة

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

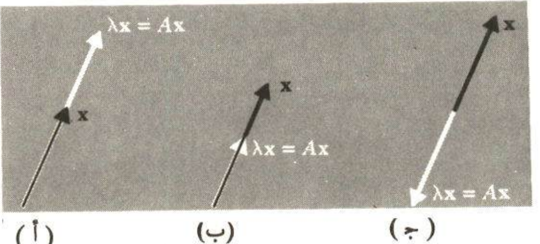
أو بالصورة المكافئة

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

ولكى تكون λ قيمة ذاتية ، يجب أن يكون لهذه المعادلة حل غير صفرى . مع ذلك ، من نظرية (١٣) قسم ٤ – ٦ سيكون للمعادلة حل غير صفرى إذا وفقط إذا كان

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

تسمى هذه المعادلة **بالمعادلة المميزة** للمصفوفة A ، وتكون الأعداد القياسية المحققة لهذه المعادلة هى القيم الذاتية للمصفوفة A .



(أ) (ب) (جـ)

(شكل ٦ – ١) (أ) تمدد $\lambda > 1$. (ب) تقلص $0 < \lambda < 1$. (جـ) عكس اتجاه $\lambda < 0$.

مثـــال (٢) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحـــل : حيث أن

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

وأن

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

فإن المعادلة المميزة تكون هى المعادلة

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

وحلول هذه المعادلة هى $\lambda = 1$ ، $\lambda = 2$ ؛ وهاتان هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A .

مثـــال (٣) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحـــل : بالمضى على نسق مثـــال (٢) :

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ولذلك فيجب على القيم الذاتية للمصفوفة A أن تحقق معادلة الدرجة الثانية $\lambda^2+1 = 0$ حيث أن الحلول الوحيدة لهذه المعادلة هى الأعداد التخيلية $\lambda = i$ ، $\lambda = -i$ وحيث أننا نفترض أن كل أعدادنا القياسية أعداد حقيقية ، فلا يكون للمصفوفة A أى قيم ذاتية(*) .

مثـــال (٤) :

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحـــل : كما فى الأمثلة السابقة

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

لذلك يجب على القيم الذاتية للمصفوفة A أن تحقق معادلة الدرجة الثالثة .

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \qquad (6.2)$$

لحل هذه المعادلة ، سنبدأ بالبحث عن حلول من الأعداد الصحيحة . يمكن تبسيط هذه المهمة كثيراً باستغلال حقيقة أن كل الحلول التى هى أعداد صحيحة (إذا وجد أى منها) لمعادلة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

يجب أن تكون قواسم الحد الثابت c_n. لذلك فالحلول الوحيدة الممكنة من الأعداد الصحيحة للمعادلة (6.2) هى قواسم للعدد 4 – ، أى ± 1 ، ± 2 ، ± 4 . يبين التعويض المتتابع لهذه القيم أن $\lambda=4$ حل من الأعداد الصحيحة . ونتيجة لذلك ، فإن $\lambda - 4$ يجب أن تكون عاملا من عوامل الطرف الأيسر للمعادلة (6.2) بقسمة $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ على $\lambda - 4$ نبين أن (6.2) يمكن كتابتها كالتالى

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

لذلك فالحلول الباقية المعادلة (6.2) تحقق معادلة الدرجة الثانية

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

(*) كما اكدنا فى قســـم ٤ – ٢ ، توجد بعض التطبيقات التى تتطلب اعدادا قياسية مركبة وفراغ اتجاهى مركب . فى هذه الحالات ، يسمح للمصفوفات ان يكون لها قيم ذاتية مركبة . مع ذلك ، فى هذا النص .سنأخذ فى الاعتبار فقط القيم الذاتية الحقيقية .

والتي يمكن حلها بالصيغة التربيعية . وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda = 4 \qquad \lambda = 2 + \sqrt{3} \qquad و \qquad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

ملحوظة : فى المسائل العملية ، غالباً ماتكون المصفوفة A كبيرة لدرجة أن يكون من غير العملى تعيين المعادلة المميزة ، لذلك تستخدم طرق تقريبية متعددة لإيجاد القيم الذاتية . سنشرح بعض هذه الطرق فى الباب الثامن .

تلخص النظرية التالية نتائجنا التى ذكرناها .

نظرية ١ : إذا كانت A مصفوفة ما من النوع $n \times n$ ، فالتقارير التالية تكون متكافئة .

(أ) λ قيمة ذاتية للمصفوفة A .

(ب) يوجد لنظام المعادلات $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ حلول غير تافهة .

(جـ) يوجد متجه غير صفرى $\mathbf{x}$ فى R^n بحيث تكون $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(د) λ حل حقيقى للمعادلة المميزة $\det(\lambda I - A) = 0$.

الآن ونحن نعرف كيف نوجد القيم الذاتية فإننا نرجع إلى مسألة إيجاد المتجهات الذاتية . المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة لقيمة ذاتية λ هى المتجهات غير الصفرية التى تحقق $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ بطريقة مكافئة ، المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة λ هى المتجهات غير الصفرية فى فراغ الحل للمعادلة $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. يسمى فراغ الحل هذا بالفراغ الذاتى للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ .

مثـال (٥) :

أوجد أساسات الفراغات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحـل : المعادلة المميزة للمصفوفة A هى $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$ (حقق ذلك)، وإذن القيم الذاتية للمصفوفة A هى $\lambda = 1$ ، $\lambda = 5$

بالتعريف ، يكون

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً للقيمة λ إذاً وفقط إذا كان $\mathbf{x}$ حلا غير تافه للمعادلة $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، أى المعادلة

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

إذا كانت $\lambda = 5$ فإن (6.3) تصبح

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى (حقق ذلك)

$$x_1 = -s \qquad x_2 = s \qquad x_3 = t$$

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة $\lambda = 5$ هي المتجهات غير الصفرية التي على الصورة

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

غير مرتبطين خطياً ، فإنهما يكونان أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 5$.

إذا كانت $\lambda = 1$ فإن (6.3) تصبح

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى (حقق ذلك)

$$x_1 = t \qquad x_2 = t \qquad x_3 = 0$$

لذلك فإن المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 1$ هي المتجهات غير الصفرية التي على الصورة

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وإذن المتجه

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أساس للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

يمكن تعريف المتجهات الذاتية والقيم الذاتية للمؤثرات الخطية مثلما تم للمصفوفات . يسمى العدد القياسى λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطى $T : V \to V$ إذا وجد متجه غير صفرى $\mathbf{x}$ فى V بحيث أن $T\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. ويسمى المتجه $\mathbf{x}$ متجهاً ذاتياً للمؤثر T مناظراً للقيمة λ . بطريقة مكافئة، المتجهات الذاتية للمؤثر T المناظرة للقيمة λ هى المتجهات غير الصفرية فى نواة $\lambda I - T$ (أنظر تمرين ١٩) . تسمى هذه النواة بالفراغ الذاتى للمؤثر T المناظر للقيمة λ .

يمكن إثبات أنه إذا كان V فراغ ذات بعد محدود وكانت A مصفوفة المؤثر T بالنسبة إلى أى أساس B ، فإن :

١ – القيم الذاتية للمؤثر T هى القيم الذاتية للمصفوفة A .

٢ – يكون المتجه $\mathbf{x}$ متجهاً ذاتياً للمؤثر T مناظراً للقيمة λ إذا وفقط إذا كانت مصفوفة إحداثياته $[\mathbf{x}]_B$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً للقيمة λ .

نترك البراهين للتمارين .

مثـــال (٦) :

أوجد القيم الذاتية وأساسات الفراغات الذاتية للمؤثر الخطى $T : P_2 \to P_2$ المعرف بالصيغة

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2$$

الحـــل : مصفوفة المؤثر T بالنسبة إلى الأساس المعتاد $B = \{1, x, x^2\}$ هى

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية للمؤثر T هى القيم الذاتية للمصفوفة A أى أن $\lambda=1$ ، $\lambda=5$ (أنظر مثال (٥)) . ومن مثال (٥) أيضاً الفراغ الذاتى للمصفوفة A المناظر للقيمة $\lambda = 5$ له الأساس $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ والفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 1$ له الأساس $\{\mathbf{u}_3\}$ حيث

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفات هى مصفوفات الأحداثيات بالنسبة إلى B المكون من

$$\mathbf{p}_1 = -1 + x \qquad \mathbf{p}_2 = x^2 \qquad \mathbf{p}_3 = 1 + x$$

عليه يكون $\{-1 + x, x^2\}$ هو أساس للفراغ الذاتى للمؤثر T المناظر للقيمة $\lambda = 5$ ويكون $\{1 + x\}$ أساسا للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 1$.

تمارين ٦ — ١

١ – أوجد المعادلات المميزة للمصفوفات التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢ – أوجد القيم الذاتية للمصفوفات فى تمرين (١) .

٣ – أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات فى تمرين (١) .

٤ – فى كل جزء من تمرين (١) ، افترض أن $T : R^2 \to R^2$ هو الضرب فى المصفوفة المعطاة ، صف وصفاً إجمالياً كل الخطوط فى R^2 التى ترسم إلى نفسها تحت الراسم T .

٥ – أوجد المعادلات المميزة للمصفوفة التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

٦ – أوجد القيم الذاتية للمصفوفات فى تمرين (٥) .

٧ – أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات فى تمرين (٥) .

٨ – أوجد المعادلات المميزة للمصفوفات التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

٩ – أوجد القيم الذاتية للمصفوفات فى تمرين (٨) .

١٠ – أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمصفوفات فى تمرين (٨) .

١١ – **(لقراء المادة الاختيارية) ليكن $T : P_2 \to P_2$ معرفاً بالصيغة**

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2.$$

(أ) أوجد القيم الذاتية للمؤثر T .

(ب) أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمؤثر T .

١٢ – ليكن $T : M_{22} \to M_{22}$ معرفاً بالصيغة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد القيم الذاتية للمؤثر T .

(ب) أوجد أساسات للفراغات الذاتية للمؤثر T .

١٣ – أثبت أن $\lambda = 0$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وفقط إذا كانت A غير قابلة للانعكاس .

١٤ – إذا كانت A مصفوفة مربعة ، فإن $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ تسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A . أثبت أن الحد الثابت فى كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A من الفراغ $n \times n$ هو $(-1)^n \det(A)$.

إرشاد : الحد الثابت هو قيمة كثيرة الحدود المميزة عندما $\lambda = 0$) .

١٥ – أثر مصفوفة مربعة A هو مجموع العناصر فى القطر الرئيسى . أثبت أن المعادلة المميزة لمصفوفة A من النوع 2×2 هى $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ حيث $tr(A)$ هو أثر A .

١٦ – برهن أن القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هى عناصر القطر الرئيسى

١٧ – أثبت أنه إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن λ^2 قيمة ذاتية للمصفوفة A^2 ، بشكل أعم ، أثبت أن λ^n قيمة ذاتية للمصفوفة A^n حيث n عدد صحيح .

١٨ – استخدم نتائج التمرينين (١٦ ، ١٧) لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A^9 حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

١٩ – (لقراء المادة الاختيارية) لتكن λ قيمة ذاتية للمؤثر الخطى $T : V \to V$ أثبت أن المتجهات الذاتية للمؤثر T المناظرة للقيمة λ هى المتجهات غير الصفرية فى نواة $\lambda I - T$.

٦ – ٢ التحويل الى الصورة القطرية

فى هـذا القسم وفى القسم التالى سنهتم بالمسألتين التاليتين :

مسألة (١) : إذا أعطينا مؤثراً خطيا $T : V \to V$ على فراغ خطى ذى بعد محدود فهل يوجد أساس للفراغ V بالنسبة له تكون المصفوفة T قطرية ؟

مسألة (٢) : إذا أعطينا مؤثراً خطياً $T : V \to V$ على فراغ ضرب داخلى ذى بعد محدود ، فهل يوجد أساس عيارى متعامد للفراغ V بالنسبة له تكون مصفوفة T قطرية ؟

إذا كانت A مصفوفة المؤثر $T : V \to V$ بالنسبة إلى أساس ما ، فإن مسألة (١) تكافىء السؤال عن وجود تغيير للأساس بحيث تكون المصفوفة الجديدة للمؤثر T قطرية . من نظرية (٥) قسم (٥-٤) ، المصفوفة الجديدة للمؤثر T ستكون $P^{-1}AP$ حيث P هي مصفوفة الانتقال بالمناسبة . إذا كان V فراغ ضرب داخلي و كانت الأساسات عيارية متعامدة ،فمن نظرية (٢٧) قسم (٤ - ١٠) ، ستكون P عمودية . وهذا يؤدى بنا إلى الصياغة التالية بالمصفوفات للمسائل السابقة .

مسألة (١): (صيغة بالمصفوفات) إذا أعطينا مصفوفة مربعة A ، فهل توجد مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ؟

مسألة (٢) : (صيغة بالمصفوفات) إذا أعطينا مصفوفة مربعة A ، فهل توجد مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1} AP = (P^t AP)$ قطرية ؟

توحى هذه المسائل بالتعاريف الآتية :

تعريف : تسمى المصفوفة المربعة A قابلة للتحول إلى الصورة القطرية إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ، ويقال إن المصفوفة P **تحول A إلى الصورة القطرية .**

تعتبر النظرية التالية الأداة الأساسية لدراسة قابلية التحول إلى الصورة القطرية ويبرز برهانها طريقة تحويل مصفوفة ما إلى الصورة القطرية .

نظرية ٢ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ ، فإن التقارير التالية مكافئة .

(أ) A قابلة للتحول إلى الصورة القطرية .

(ب) للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً .

البرهان : (أ) $\Rightarrow$ (ب) حيث إن A بالفرض قابلة للتحول إلى الصورة القطرية ، إذن توجد مصفوفة قابلة للانعكاس .

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ، لتكن $P^{-1}AP = D$ حيث

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

إذن $AP = PD$ ، أى أن

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

إذا افترضنا الآن أن $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$ ترمز لمتجهات الأعمدة للمصفوفة P فمن (6.4) الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هى $\lambda_1\mathbf{p}_1$ ، $\lambda_2\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\lambda_n\mathbf{p}_n$ ولكن من مثال (١٧) بقسم (١-٤) ، الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هى $A\mathbf{p}_1$ ، $A\mathbf{p}_2$ ، ... ، $A\mathbf{p}_n$ لذلك يجب أن يكون لدينا

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{6.5}$$

حيث أن P قابلة للانعكاس ، فإن متجهات أعمدتها تكون جميعها غير صفرية ، إذن استخدام (6.5) ، تكون λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n قيما ذاتية للمصفوفة A وتكون $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$ متجهات ذاتية مناظرة . حيث أن P قابلة للانعكاس ، فينتج من نظرية (١٣) فى قسم (٤-٦) أن $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$ غير مرتبطة خطياً وإذن للمصفوفة عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً .

(ب) $\Leftarrow$ (أ) افترض أن A لها عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$ بقيم ذاتية مناظرة λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n ولتكن

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

هى المصفوفة التى متجهات الأعمدة لها هى $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$ باستخدام مثال (١٧) فى قسم (١-٤) ، تكون أعمدة حاصل الضرب AP هى

$$A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n$$

ولكن

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n = \lambda\mathbf{p}_n$$

وإذن

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \tag{6.6}$$

حيث D هى المصفوفة القطرية التى لها القيم الذاتية λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n على القطر الرئيسى . حيث أن متجهات الأعمدة للمصفوفة A غير مرتبطة خطياً ، فإن P قابلة للانعكاس وإذن يمكن كتابة (6.6) على الصورة $P^{-1}AP = D$ أى ان ، A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

نحصل من هذا البرهان على الطريقة التالية للتحويل إلى الصورة القطرية ، مصفوفة A قابلة لهذا التحويل ومن نوع $n \times n$.

خطوة (١) : أوجد عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً للمصفوفة A ولتكن $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ، ... ، $\mathbf{p}_n$.

خطوة (٢) كون المصفوفة P التي متجهات أعمدتها $\mathbf{p}_1$ ، $\mathbf{p}_2$ ... ، $\mathbf{p}_n$

خطوة (٣) : ستكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصرها القطرية المتتابعة هي λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n حيث λ_i هي القيمة الذاتية المناظرة للمتجه $\mathbf{p}_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$

مثـــال (٧) :

أوجد مصفوفة P تحول إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

الحـــل : من مثال (٥) تكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 1$ ، $\lambda = 5$ وأيضاً من هذا المثال المتجهان

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 5$ ويكون

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أساساً للفراغ الذاتي المناظر للقيمة $\lambda = 1$ من السهل أن نتحقق أن $\{\mathbf{p}_1 ، \mathbf{p}_2 ، \mathbf{p}_1\}$ غير مرتبطة خطياً ، لذلك فإن

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحول A إلى الصورة القطرية . للتأكد من ذلك ، يجب على القارىء أن يتحقق من أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليس هناك ترتيب مفضل لأعمدة P حيث ان العنصر القطرى رقم i للمصفوفة $P^{-1}AP$ يكون قيمة ذاتية لمتجه العمود رقم i للمصفوفة P ، فتغيير ترتيب أعمدة P يغير فقط ترتيب القيم الذاتية على قطر المصفوفة $P^{-1}AP$ فلو كنا قد كتبنا

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فى المثال السابق ، لكنا حصلنا على

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مثـــال (٨) :

المعادلة المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

هى

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0$$

وإذن $\lambda = -1$ هى القيمة الذاتية الوحيدة للمصفوفة A ، وتكون المتجهات المناظرة للقيمة $\lambda = -1$ هى حلول $(-I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ، أى حلول النظام

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

حلول هذا النظام هى $x_1 = t$ ، $x_2 = t$ (حقق ذلك) ، إذن فالفراغ الذاتى يتكون من كل المتجهات التى على الصورة

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن هذا الفراغ من بعد 1 ، فلايكون للمصفوفة A متجهان ذاتيان غير مرتبطين خطياً ، ولذلك تكون A غير قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

مثـــال (٩) :

ليكن $T : R^3 \to R^3$ المؤثر الخطى المعطى بالصيغة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^3 بالنسبة له تكون المصفوفة T قطرية .

الحــل : إذا كانت $B = \{e_1 ، e_2 ، e_3\}$ ترمز للأساس المعتاد للفراغ R^3 ، فإن

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}$$

ولذلك تكون المصفوفة المعتادة للمؤثر T هي

$$A = \begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\-2 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

نريد الآن أن نغير من الأساس المعتاد لأساس جديد $B' = \{u'_1 ، u'_2 ، u'_3\}$ لنحصل على مصفوفة قطرية A' للمؤثر T . إذا افترضنا أن P هي مصفوفة الانتقال من الأساس المجهول B' إلى الأساس المعتاد B ، فن نظرية (٥) بقسم (٥-٤) ، سترتبط A ، A' بالعلاقة

$$A' = P^{-1}AP$$

بمعنى أخرى ، مصفوفة الانتقال P تحول A إلى الصورة القطرية . وجدنا هذه المصفوفة في مثال (٧) ومن عملنا في ذلك المثال، نجد أن

$$A' = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

حيث أن P تمثل مصفوفة الانتقال من الأساس $B' = \{u'_1 ، u'_2 ، u'_3\}$ إلى الأساس المعتاد $B = \{e_1 ، e_2 ، e_3\}$ فإن أعمدة P تكون هي $[u'_1]_B ، [u'_2] ، [u_1']_B$ ولهذا تكون

$$[\mathbf{u}'_1]_B = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, [\mathbf{u}'_2]_B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, [\mathbf{u}'_3]_B = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

وإذن

$$\mathbf{u}'_1 = (-1)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_2 = (0)\mathbf{e}_1 + (0)\mathbf{e}_2 + (1)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'_3 = (1)\mathbf{e}_1 + (1)\mathbf{e}_2 + (0)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

هى متجهات الأساس التى تنتج المصفوفة القطرية A' للمؤثر T .

الآن وقد درسنا طرق التحويل إلى الصورة القطرية ، أية مصفوفة قابلة لهذا التحويل ، نعود إلى السؤال متى تكون المصفوفة قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ؟ ستساعدنا النتيجة التالية لدراسة هذا السؤال وسنؤجل برهانها إلى نهاية هذا القسم .

نظرية ٣ : إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_k$ متجهات ذاتية للمصفوفة A مناظرة لقيم ذاتية مختلفة λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_k فإن $\{\mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \ldots ، \mathbf{v}_k\}$ فئة غير مرتبطة خطياً .

كنتيجة لهذه النظرية ، نحصل على النتيجة المفيدة التالية .

نظرية ٤ : إذا كانت المصفوفة A من النوع $n \times n$ لها عدد n من القيم الذاتية المختلفة ، فإن A تكون قابلة للتحويل للصورة القطرية .

البرهان : إذا كانت $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_n$ متجهات ذاتية مناظرة للقيم الذاتية المختلفة λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n فمن نظرية (٣) ، تكون $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_n$ غير مرتبطة خطياً . وإذن من نظرية (٢) ، تكون A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

مثـــال (١٠) :

رأينا فى مثـــال (٤) أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاث قيم ذاتية مختلفة هى $\lambda = 4,\ \lambda = 2 + \sqrt{3},\ \lambda = 2 - \sqrt{3}$ وعليه فإن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية . بالإضافة إلى ذلك فإن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

لمصفوفة P قابلة للانعكاس . يمكن ، إذا رغب فى ذلك ، إيجاد المصفوفة P باستخدام الطريقة المبينة فى مثال (٧) .

مثـــال (١١) :

عكس نظرية (٤) ليس صحيحاً ، أى إن ، قد تكون مصفوفة A من نوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية رغم أن ليس لها n من القيم الذاتية المختلفة على سبيل المثال ، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن المعادلة المميزة للمصفوفة A هى :

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^2 = 0$$

وإذن $\lambda = 3$ هى القيمة الذاتية الوحيدة للمصفوفة A . ولكن من الواضح أن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية حيث إنه مع أخذ $P = I$ يكون

$$P^{-1}AP = I^{-1}AI = A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ملحوظة : نظرية (٣) حالة خاصة من نتيجة أكثر تعميماً افترض أن λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_k قيم ذاتية مختلفة وأننا نختار فئة غير مرتبطة خطياً فى كل من الفراغات الذاتية المناظرة . إذا أدمجنا كل هذه المتجهات فى فئة واحدة ، فيظل الناتج فئة غير مرتبطة خطياً . على سبيل المثال ، إذا اخترنا ثلاثة متجهات غير مرتبطة خطياً من فراغ ذاتى واحد واخترنا متجهين غير مرتبطين خطياً من فراغ ذاتى آخر فإن المتجهات الخمسة معاً تكون فئة غير مرتبطة خطياً . نحذف البرهان .

مادة اختيارية :

نختم هذا القسم ببرهان لنظرية (٣) .

البرهان : لتكن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_k$ متجهات ذاتية للمصفوفة A مناظرة لقيم ذاتية مختلفة λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_k سنفترض أن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_k$ مرتبطة خطياً فنحصل على تناقض . من ثم يمكننا أن نخلص إلى أن $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، ... ، $\mathbf{v}_k$ غير مرتبطة خطياً . حيث أن أى متجه ذاتى يكون ، من التعريف ، غير صفرياً ، فإن $\{\mathbf{v}_1\}$ غير مرتبطة خطياً . ليكن r هو أكبر رقم بحيث تكون $\{\mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \ldots ، \mathbf{v}_r\}$ غير مرتبطة خطياً حيث أننا مفترضين أن $\{\mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \ldots ، \mathbf{v}_k\}$ مرتبطة خطياً ، فإن r تحقق $1 \leq r < k$. فضلا عن أنه ، من تعريف r تكون $\{\mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، \ldots ، \mathbf{v}_{r+1}\}$ مرتبطة خطياً . لذلك فتوجد أعداد قياسية c_1 ، c_2 ، ... ، c_{r+1} ليست كلها أصفاراً ، بحيث أن

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \qquad (6.7)$$

بضرب كلا طرفى (6.7) فى A وباستخدام

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1,\ A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$$

نحصل على

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \qquad (6.8)$$

ضرب كل طرفى (6.7) فى λ_{r+1} وطرح الناتج من (6.8) يؤدى إلى

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

حيث أن $\{\mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 \ldots ، \mathbf{v}_r\}$ غير مرتبطة خطياً ، فتستلزم هذه المعادلة أن تكون

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \cdots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

وحيث أن λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_{r+1} مختلفة ، فيتبع ذلك

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \qquad (6.9)$$

التعويض عن هذه القيم فى (6.7) يؤدى إلى

$$c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

حيث أن المتجه الذاتى $\mathbf{v}_{r+1}$ غير صفرى ، فيتبع ذلك

$$c_{r+1} = 0 \qquad (6.10)$$

معادلتا (6.9) ، (6.10) تناقضان حقيقة أن c_1 ، c_2 ، ... ، c_{r+1} ليست كلها أصفاراً. وهذا يكمل البرهان .

تمارين ٦ — ٢

أثبت أن المصفوفات فى التمارين من ١ إلى ٤ ليست قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

١ - $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ٢ - $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ٣ - $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ٤ - $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

فى التمارين من (٥) إلى (٨) أوجد مصفوفة P تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية وعين $P^{-1}AP$

٥ - $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ ٦ - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

٧ - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ٨ - $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

فى التمارين من (٩) إلى (١٤) ، حدد ما إذا كانت A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية . إذا كانت كذلك ، فأوجد المصفوفة P التى تحول A إلى الصورة القطرية وعين $P^{-1}AP$

٩ - $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ ١٠ - $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

١١ - $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ١٢ - $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٣ - $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ١٤ - $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

١٥ – ليكن $T : R^2 \to R^2$ المؤثر الخطى المعطى بالصيغة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^2 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٦ – ليكن $T : R^3 \to R^3$ المؤثر الخطى المعطى بالصيغة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - \quad x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد أساساً للفراغ R^3 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٧ – ليكن $T : P_1 \to P_1$ المؤثر الخطى المعطى بالصيغة .

$$T(a_0 + a_1x) = a_0 + (6a_0 - a_1)x$$

أوجد أساساً للفراغ P_1 بالنسبة إليه تكون مصفوفة T قطرية .

١٨ – لتكن A مصفوفة من النوع $n \times n$ و P مصفوفة قابلة للانعكاس من النوع $n \times n$. أثبت أن

(أ) $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$

(ب) $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ (k عدد صحيح موجب)

١٩ – استخدم تمرين (١٨) ليساعد فى حساب A^{10} ، حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(إرشاد : أوجد مصفوفة P تحول A إلى الصورة القطرية واحسب $(P^{-1}AP)^{10}$)

٢٠ – لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

أثبت أن

(أ) إذا كانت $(a-d)^2 + 4bc > 0$ فإن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

(ب) إذا كانت $(a-d)^2 + 4bc < 0$ فإن A غير قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

٦ – ٣ التحويل العمودى الى الصورة القطرية – المصفوفات المتماثلة

ندرس فى هذا القسم ، المسألة الثانية الموضوعة فى بداية قسم (٦–٢) . ستقودنا دراستنا إلى اعتبار نوع عام من المصفوفات يسمى المصفوفات المتماثلة .

خلال هذا القسم كله « عمودى » تعنى عمودى بالنسبة إلى الضرب الداخلى الاقليدى على R^n .

تعريف : تسمى المصفوفة المربعة A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية . إذا وجدت مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1}AP$ $(= P^tAP)$ قطرية يقال إن المصفوفة P **تحول عمودياً A إلى الصورة القطرية**

لدينا سؤالان يؤخذان بعين الاعتبار . الأول ، أى المصفوفات تكون قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية ، والثانى ، كيف نجد مصفوفة P لتجرى التحويل العمودى إلى الصورة القطرية لمصفوفة قابلة لهذا التحويل ؟ تختص النظرية التالية بالسؤال الأول .

نظرية ٥ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فيتكافأ التقريران التاليان :

(أ) A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية .

(ب) للمصفوفة A فئة عيارية متعامدة من n متجهاً ذاتياً .

البرهان : (أ) $\Leftarrow$ (ب) . حيث أن A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية ، فتوجد مصفوفة عمودية P بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية . كما تبين فى برهان نظرية (٢) ، متجهات الأعمدة للمصفوفة P وعددها n هى المتجهات الذاتية للمصفوفة A حيث أن P عمودية ، فتجهات الأعمدة هذه تكون عيارية عمودية (انظر نظرية ٢٨ ، بقسم ٤ – ١٠) لهذا يكون لدى A عدد n من المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة .

(ب) $\Leftarrow$ (أ) . افترض أن للمصفوفة A فئة عيارية متعامدة من n متجهاً ذاتياً $\{\mathbf{p}_1 ، \mathbf{p}_2 ، \ldots ، \mathbf{p}_n\}$. كما تبين من برهان نظرية (٢) ، فالمصفوفة P بهذه المتجهات الذاتية كأعمدة لها تحول A إلى الصورة القطرية . حيث أن هذه المتجهات الذاتية عيارية متعامدة ، فتكون P عمودية ولذلك تحول A إلى الصورة القطرية .

يثبت برهان نظرية (٥) أن أية مصفوفة A من النوع $n \times n$ القابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية تحول عمودياً إلى الصورة القطرية بواسطة أى مصفوفة P من النوع $n \times n$ فتشكل أعمدتها فئة عيارية متعامدة من متجهات ذاتية للمصفوفة A . لتكن D المصفوفة القطرية

$$D = P^{-1}AP$$

إذن

$$A = PDP^{-1}$$

أو ، حيث أن P عمودية

$$A = PDP^t$$

لذلك فإن

$$A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t = A$$

أى مصفوفة لها الخاصية

$$A = A^t$$

تسمى متماثلة . لذلك نكون قد أثبتنا أن أى مصفوفة قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية هى مصفوفة متماثلة . والعكس أيضاً صحيح ، إلا أننا نحذف البرهان حيث أنه يخرج بنا عن مجال هذا الكتاب . تلخص النظرية التالية نقاشنا .

نظرية ٦ : إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإن التقريرين التاليين يكونان متكافئين .

(أ) A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية

(ب) A متماثلة

مثـــال (١٢) :

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

متماثلة إذ أن $A = A^t$

نعود الآن إلى مسألة إيجاد مصفوفة عمودية P لتحويل مصفوفة متماثلة إلى الصورة القطرية . مفتاح الحل هو النظرية التالية ، والتى برهانها معطى فى نهاية هذا القسم .

نظرية ٧ : إذا كانت A مصفوفة متماثلة ، فإن المتجهات الذاتية من فراغات ذاتية مختلفة تكون متعامدة .

نحصل كنتيجة لهذه النظرية على الطريقة التالية للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية لمصفوفة متماثلة .

خطوة (١) : أوجد أساساً لكل فراغ ذاتى للمصفوفة A .

خطوة (٢) : طبق عملية جرام – شميدت على كل من هذه الأساسات لتحصل على أساس عيارى متعامد لكل فراغ ذاتى .

خطوة (٣) : كون المصفوفة P التى أعمدتها هى متجهات الأساس المنشأة فى خطوة (٢) ، هذه المصفوفة تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية .

يجب أن يكون تبرير هذه الطريقة واضحاً . تؤكد نظرية (٧) على أن المتجهات الذاتية من فراغات ذاتية مختلفة تكون متعامدة ، فى حين يؤكد تطبيق عملية جرام – شميدت على أن المتجهات الذاتية الناتجة داخل نفس الفراغ الذاتى تكون عيارية متعامدة . كذلك فإن كل فئة المتجهات الذاتية الناتجة بهذه الكيفية تكون عيارية التعامد .

مثـــال (١٣) :

أوجد مصفوفة عمودية P تحول إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحـــل : المعادلة المميزة للمصفوفة A هى

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

لذلك فتكون القيم الذاتية هي $\lambda = 2$ ، $\lambda = 8$ يمكن بالطريقة المستخدمة فى مثال (٥) إثبات أن

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 2$. تطبيق عملية جرام – شميدت على $\{\mathbf{u}_1 ، \mathbf{u}_2\}$ يؤدى إلى المتجهات الذاتية العيارية المتعامدة التالية (حقق ذلك)

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

الفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 8$ له الأساس

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تطبيق عملية جرام – شميدت على $\{\mathbf{u}_3\}$ يؤدى إلى

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

أخيراً باستخدام $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$ كأعمدة نحصل على المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

التى تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية . (لتأكيد ذلك ، قد يرغب القارىء أن يتحقق من أن P^tAP مصفوفة قطرية) .

نختتم هذا القسم بتقرير خاصيتين هامتين للمصفوفات المتماثلة . نحذف البرهان .

نظرية ٨ :

(أ) المعادلة المميزة لمصفوفة متماثلة A جميع جذورها حقيقية .

(ب) إذا كانت قيمة ذاتية λ لمصفوفة متماثلة A مكرر k من المرات كجذر للمعادلة المميزة ، فإن الفراغ الذاتى المناظر للقيمة λ يكون له البعد k .

مثـــال (١٤) :

المعادلة المميزة للمصفوفة المتماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هى

$$(\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

لذلك فإن القيم الذاتية هى $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ ، $\lambda = 2$ حيث تتكرر القيم $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ مرتين وتحدث $\lambda = 2$ مرة واحدة . لذلك فيكون الفراغان الذاتيان المناظران للقيمتين $\lambda = 4$ ، $\lambda = 1$ ثنائيا البعد ويكون الفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 1$ أحادى البعد .

مادة اختيارية :

برهان نظرية ٧ : لتكن λ_1 ، λ_2 قيمتين ذاتيتين مختلفتين لمصفوفة متماثلة A من النوع $n \times n$ ، وليكن

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

هما المتجهان الذاتيان المناظران . نريد أن نثبت أن

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = v_1v'_1 + v_2v'_2 + \cdots + v_nv'_n = 0$$

حيث أن $\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2$ مصفوفة من النوع 1×1 لها $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ كعنصر وحيد ، يمكننا أن نكمل البرهان بإثبات أن $\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2 = 0$

حيث أن $\mathbf{v}_1{}^tA\mathbf{v}_2$ مصفوفة من النوع 1×1 ومن البدهى أن كل مصفوفة من النوع 1×1 تكون متماثلة فإن

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1{}^tA\mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_1{}^tA\mathbf{v}_2)^t \\ &= \mathbf{v}_2{}^tA^t\mathbf{v}_1 && \text{(من خاصية التحرير ، انظر قسم ٢ – ٣)} \\ &= \mathbf{v}_2{}^tA\mathbf{v}_1 && \text{حيث أن } A \text{ متماثلة} \end{aligned}$$

أيضاً

$$\mathbf{v}_1{}^t A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1{}^t\lambda_2\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2$$

و

$$\mathbf{v}_2{}^t A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2{}^t\lambda_1\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_1$$
$$= \lambda_1(\mathbf{v}_2{}^t\mathbf{v}_1)^t = \lambda_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2$$

إذن

$$\lambda_1\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2$$

أى

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2 = 0$$

حيث أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ يتبع ذلك أن تكون $\mathbf{v}_1{}^t\mathbf{v}_2 = 0$

تمارين ٦ — ٢

١ – استخدم الجزء (ب) من نظرية (٨) لإيجاد أبعاد الفراغات الذاتية للمصفوفات المتماثلة التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

فى التمارين من (٢) إلى (٩) أوجد مصفوفة P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية ، وعين $P^{-}AP$

٢ – $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ٣ – $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

٤ – $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ ٥ – $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

٦ – $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ٧ – $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

٨ – $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0 ٩ – $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

١٠ - أوجد مصفوفة تحول عمودياً إلى الصورة القطرية المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

حيث $b \neq 0$.

١١ - تسمى المصفوفتان A و B من النوع $n \times n$ **متوافقين عمودياً** ، إذا وجدت مصفوفة عمودية P بحيث تكون $B = P^{-1} AP$.

أثبت أنه إذا كانت A متماثلة وكانت A ، B متوافقتين عمودياً ، فإن B متماثلة .

١٢ - برهن نظرية (٧) للمصفوفات المتماثلة من النوع 2×2 .

١٣ - برهن نظرية (٨ أ) للمصفوفات المتماثلة من النوع 2×2 .

٧ـ تطبيقات

٧ ـ ١ تطبيقات فى المعادلات التفاضلية

توصف كثير من قوانين الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء والاقتصاد بمصطلحات المعادلات التفاضلية ، أى ، المعادلات المتضمنة على دوال ومشتقاتها . الغرض من هذا القسم هو توضيح إحدى الطرق التى يطبق فيها الجبر الخطى لحل أنظمة معينة من المعادلات التفاضلية . مجال هذا القسم ضيق ، ولكنه قد يفيد فى إقناع القارىء أن للجبر الخطى تطبيقات راسخة .

تعتبر المعادلة التاليه من أبسط المعادلات التفاضلية

$$y' = ay \qquad (7.1)$$

حيث $y = f(x)$ دالة مجهولة يراد تعيينها ، $y' = dy/dx$ هى ومشتقاتها ، a ثابت مثل أغلب المعادلات التفاضلية ، للمعادلة (7.1) حلول لانهائية العدد ، وهى دوال على الصورة

$$y = ce^{ax} \qquad (7.2)$$

حيث c ثابت اختيارى . كل دالة على هذه الصورة حل للمعادلة $y' = ay$ حيث أن

$$y' = cae^{ax} = ay$$

وبالعكس كل حل للمعادلة $y' = ay$ يجب أن يكون دالة على الصورة ce^{ax} (انظر تمرين ٧) ، لهذا فإن (7.2) تصف كل حلول المعادلة $y' = ay$ إننا نسمى (7.2) الحل العام للمعادلة $y' = ay$. فى بعض الأحيان تنص المسألة الفيزيائية المنشئة لمعادلة تفاضلية على بعض الشروط الإضافية التى تسمح لنا أن نفرد حلا خاصاً واحداً من الحل العام . على سبيل المثال ، إذا اقتضينا أن يكون حل المعادلة $y' = ay$ مستوفياً للشرط الإضافى

$$y(0) = 3 \qquad (7.3)$$

بمعنى أن $y = 3$ عند $x = 0$ فبالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة العامة $y = ce^{ax}$ نحصل على قيمة للثابت c ، وهى

$$3 = ce^0 = c$$

ولذلك فإن

$$y = 3e^{ax}$$

هى الحل الوحيد للمعادلة $y' = ay$ الذى يستوفى الشرط الإضافى . يسمى شرطاً ابتدائياً الشرط ، مثل (7.3) ، الذى يخصص قيمة الحل عند نقطة ومسألة حل معادلة تفاضلية تحت شرط ابتدائى تسمى مسألة قيمة ـ ابتدائية .

سنكرس اهتمامنا ، فى هذا القسم ، لحل أنظمة لمعادلات تفاضلية على الصورة

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{7.4}$$

حيث $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f_2(x_2)$ ، ... ، $y_n = f_n(x)$ دوال يراد تعيينها ، والمعاملات a_{ij} ثوابت . باستخدام المصفوفات يمكن كتابة (7.4) كما يلى .

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً

$$Y' = AY$$

مثـــال (١) :

(أ) أكتب النظام

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفات .

(ب) حل النظام

(جـ) أوجد حلا للنظام يحقق الشروط الابتدائية ، $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 4$ ، $y_3(0) = -2$

الحـــل : (أ)

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

أى

$$Y' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} Y$$

(ب) يمكننا حل المعادلات بحل كل معادلة على حدة ، لأن كل معادلة تتضمن دالة مجهولة واحدة فقط . باستخدام (7.2) نحصل على

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_1 e^{3x} \\
y_2 &= c_2 e^{-2x} \\
y_3 &= c_3 e^{5x}
\end{aligned}
$$

أو بصيغة المصفوفات

$$
Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}
$$

(جـ) نحصل من الشروط الابتدائية المعطاة على

$$
\begin{aligned}
1 &= y_1(0) = c_1 e^0 = c_1 \\
4 &= y_2(0) = c_2 e^0 = c_2 \\
-2 &= y_3(0) = c_3 e^0 = c_3
\end{aligned}
$$

لهذا فيكون الحل المستوفى للشروط الابتدائية هو

$$
y_1 = e^{3x}, y_2 = 4e^{-2x}, y_3 = -2e^{5x}
$$

أو بصيغة المصفوفات

$$
Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}
$$

كان النظام فى هذا المثال سهل الحل لأن كل معادلة تضمنت دالة مجهولة واحدة فقط ، وكانت هذه الحالة لأن مصفوفة المعاملات (7.5) للنظام كانت قطرية . ولكن كيف نعالج نظاماً

$$
Y' = AY
$$

فيه المصفوفة A ليست قطرية ؟ الفكرة بسيطة : حاول أن تجرى تعويضاً عن المصفوفة Y يؤدى إلى نظام جديد بمصفوفة معاملات قطرية ؛ حل هذا النظام الأبسط الجديد ، ومن ثم استخدم هذا الحل لتعيين حل النظام الأصلى.

نوع التعويض الذى نحفظه فى ذاكرتنا هو

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \cdots + p_{1n}u_n \\
y_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 + \cdots + p_{2n}u_n \\
&\vdots \\
y_n &= p_{n1}u_1 + p_{n2}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

أو بصيغة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً

$$Y = PU$$

فى هذا التعويض المعاملات p_{ij} ثوابت يراد تعيينها بحيث يكون النظام الجديد المتضمن للدوال المجهولة u_1 ، u_2 ، ... ، u_n مصفوفة معاملات قطرية . سنترك كتمرين للطالب ، أن يجرى عملية التفاضل على كل معادلة فى (7.6) ويستنتج أن

$$Y' = PU'$$

إذا أجرينا التعويضين $Y = PU$ ، $Y' = PU'$ فى النظام الأصلى

$$Y' = AY$$

وإذا افترضنا أن P قابلة للانعكاس ، فإننا نحصل على

$$PU' = A(PU)$$

أى

$$U' = (P^{-1}AP)U$$

أى

$$U' = DU$$

حيث $D = P^{-1}AP$. ويكون الآن اختيار P واضحاً ، فإذا أردنا لمصفوفة المعاملات D أن تكون قطرية ، فيجب أن نختار P لتكون مصفوفة تحول A إلى الصورة القطرية .

يقترح ماسبق الأسلوب التالى لحل نظام ما

$$Y' = AY$$

له مصفوفة معاملات A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية

خطوة (١) : أوجد مصفوفة P تحول A إلى الصورة القطرية

خطوة (٢) : أجر التعويض $Y = PU$ ، $Y' = PU'$ لتحصل على « نظام قطرى » جديد $U' = DU$ حيث $D = P^{-1}AP$

خطوة (٣) : حل $U' = DU$

خطوة (٤) : : عين Y من المعادلة $Y = PU$

مثـــال (٢) :

(أ) حل

$$y_1' = y_1 + y_2$$
$$y_2' = 4y_1 - 2y_2$$

(ب) أوجد الحل الذى يحقق الشرطين الابتدائيين $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 6$ ،

الحـــل (أ): مصفوفة المعاملات للنظام هى

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

وفقاً للمناقشة فى (٦ - ٢) ، تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية بواسطة أى مصفوفة أعمدتها متجهات ذاتية غير مرتبطة خطياً للمصفوفة .

حيث أن

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

فتكون القيم الذاتية للمصفوفة هى $\lambda = 2$ ، $\lambda = -3$. بالتعريف يكون

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً للقيمة λ إذا وفقط إذا كان $\mathbf{x}$ حلا غير صفريا للمعادلة $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ أى للنظام

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\lambda = 2$ هذا النظام يصبح

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إجراء الحل يعطى

$$x_1 = t, \qquad x_2 = t$$

لهذا فإن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن يكون

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أساساً للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 2$. يمكن للقارىء ، بالمثل ، أن يثبت أن

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأساس للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -3$ وإذن

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تحول A إلى الصورة القطرية ويكون

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

لذلك فيؤدى التعويض

$$Y = PU \quad \text{و} \quad Y' = PU'$$

إلى « النظام القطرى » الجديد

$$U' = DU = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} U \quad \text{أى} \quad \begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= -3u_1 \end{aligned}$$

من (7.2) يكون حل هذا النظام هو

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1e^{2x} \\ u_2 &= c_2e^{-3x} \end{aligned} \quad \text{أى} \quad U = \begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix}$$

ومن ثم تعطى المعادلة $Y = PU$ الحل بالنسبة إلى Y كما يلى

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1e^{2x} \\ c_2e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{2x} - \frac{1}{4}c_2e^{-3x} \\ c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \end{bmatrix}$$

أى

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} - \tfrac{1}{4}c_2e^{-3x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \end{aligned} \tag{7.7}$$

(ب) إذا عوضنا من الشرط الابتدائى فى (7.7) فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} c_1 - \tfrac{1}{4}c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned}$$

لحل هذا النظام نحصل على

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = 4$$

وإذن من (7.7) يكون الحل المستوفى للشرطين الابتدائيين هو

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{2x} - e^{-3x} \\ y_2 &= 2e^{2x} + 4e^{-3x} \end{aligned}$$

لقد افترضنا فى هذا القسم أن مصفوفة المعاملات للنظام $Y'=AY$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية . إذا لم تكن الحالة كذلك ، يجب أن تستخدم طرق أخرى لحل النظام . تبحث هذه الطرق فى مراجع متقدمة أكثر من ذلك .

تمارين ٧ — ١

١ – (أ) حل النظام

$$y'_1 = y_1 + 4y_2$$
$$y'_2 = 2y_1 + 3y_2$$

(ب) أوجد الحل الذى يحقق الشرطين الابتدائيين $y_1(0) = 0$ ، $y_2(0) = 0$

٢ – (أ) حل النظام

$$y'_1 = y_1 + 3y_2$$
$$y'_2 = 4y_1 + 5y_2$$

(ب) أوجد الحل الذى يحقق الشرطين الابتدائيين $y_1(0) = 2$ ، $y'_2(0) = 1$

٣ – (أ) حل النظام

$$y'_1 = 4y_1 + y_3$$
$$y'_2 = -2y_1 + y_2$$
$$y'_3 = -2y_1 + y_3$$

(ب) أوجد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.

٤ – حل النظام

$$y'_1 = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3$$
$$y'_2 = 2y_1 + 4y_2 + 2y_3$$
$$y'_3 = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

٥ – حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 6y = 0$ إرشاد : افترض أن $y_1 = y$ ، $y_2 = y'$ وأثبت أن

$$y'_1 = y_2$$
$$y'_2 = y'' = y' + 6y = y'_1 + 6y_1 = 6y_1 + y_2$$

٦ – حل المعادلة التفاضلية $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ أرشاد : افترض أن $y_1 = y$ ، $y_2 = y'$ ، $y_3 = y''$ ثم اثبت أن

$$y'_1 = y_2$$
$$y'_2 = y_3$$
$$y'_3 = 6y_1 - 11y_2 + 6y_3$$

٧ – برهن أن : كل حل للمعادلة $y' = ay$ يكون على الصورة $y = ce^{ax}$ (إرشاد : افترض أن $y = f(x)$ حل ، وأثبت أن $f(x)e^{-ax}$ ثابت) .

٨ – أثبت أنه إذا كانت A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية وكانت

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

تحقق $Y' = AY$ فتكون كل y_i تركيبة خطية من $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ حيث λ_1 ، λ_2 ، ... λ_n القيم الذاتية للمصفوفة A .

٧ ـــ ٢ تطبيقات فى مسائل التقريب ـــ متسلسلات فورير

نهتم فى كثير من التطبيقات بإيجاد أحسن تقريب ممكن فى فترة ما لدالة f بواسطة دالة أخرى من نوع مخصص ما ، على سبيل المثال

(أ) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[0, 1]$ للدالة e^x بواسطة كثيرة حدود على الصورة $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

(ب) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[-1, 1]$ للدالة $\sin \pi x$ بواسطة دالة على الصورة $a_0 + a_1e^x + a_2e^{2x} + a_3e^{3x}$.

(جـ) أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[0, 2\pi]$ للدالة $|x|$ بواسطة دالة على الصورة $a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x$.

لاحظ أن فى كل من هذه الأمثلة أخذت دوال التقريب من فراغ جزئى للفراغ الاتجاهى $C[a, b]$ (الدوال المتصلة على $[a, b]$) . كان الفراغ الجزئى فى المثال الأول هو الفراغ الجزئى من $C[0, 1]$ المنشأ بواسطة 1 ، x ، x^2 ، وفى المثال الثانى كان هو الفراغ الجزئى من $C[-1, 1]$ المنشأ بواسطة 1 ، e^x ، e^{2x} ، e^{3x} وفى المثال الثالث هو الفراغ الجزئى من $C[0, 2\pi]$ المنشأ بواسطة 1 ، $\sin x$ ، $\sin 2x$ ، $\cos x$ ، $\cos 2x$ لذلك ينص كل من هذه الأمثلة على مسألة بالصورة التالية :

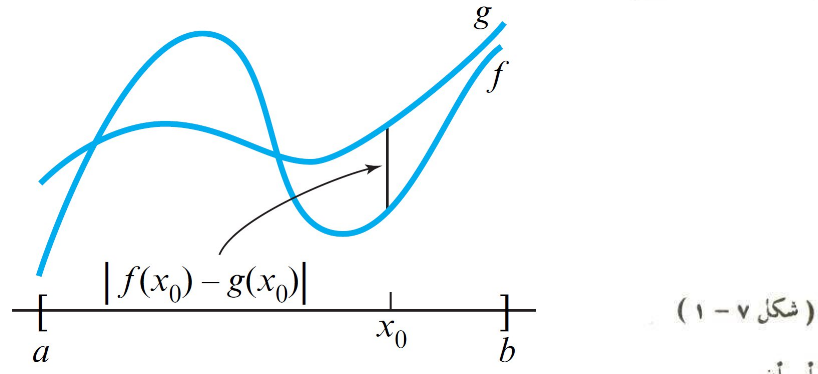
مسألة التقريب : أوجد أحسن تقريب ممكن على الفترة $[a, b]$ لدالة معطاة f باستخدام تقريبات فقط من فراغ جزئى مخصص W من $C[a, b]$.

لحل هذه المسألة يجب أن نجعل التعبير « أحسن تقريب ممكن على $[a,b]$ » أكثر دقة . من البدهى أن يكون أحسن تقريب على $[a, b]$ هو ذلك الذى ينتج أقل خطأ . ولكن ماذا نعنى بكلمة « خطأ » ؟ إذا كنا مهتمين فقط بتقريب الدالة $f(x)$ عند نقطة واحدة x_0 فإن الخطأ عند x_0 باستخدام تقريب ما $g(x)$ سيكون ببساطة هو

$$\text{الخطأ} = |f(x_0) - g(x_0)|$$

ويسمى فى بعض الأحيان **الانحراف** بين f ، g عند x_0 (انظر شكل ٧ ـ ١) . إلا أننا مهتمون بالتقريب على فترة بأكملها $[a, b]$ ، وليس عند نقطة واحدة . نتيجة لذلك ، فى أحد أجزاء الفترة قد يكون لتقريب ما $g_1(x)$ انحرافات عن $f(x)$ أصغر من انحرافات تقريب ما $g_2(x)$ وفى جزء آخر من الفترة قد ينعكس الوضع . كيف يقرر الدارس ماهو أحسن تقريب شامل ؟ مانريد ه هو طريقة ما لقياس الخطأ

الشامل عند استخدام تقريب $g(x)$. أحد مقاييس الخطأ الشامل نحصل عليه بأن نكامل الانحراف $|f(x)-g(x)|$ على الفترة بأكلها

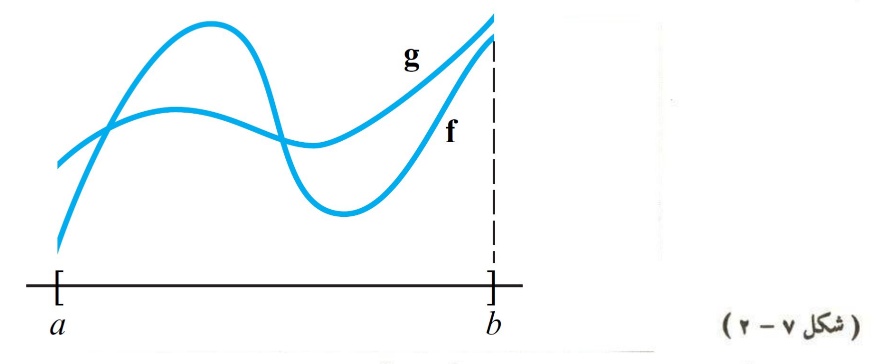


(شكل ٧ – ١)

أى أن

$$\text{error} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{7.8}$$

هندسياً ، تكون (7.8) هى المساحة بين الرسمين البيانيين للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ على الفترة $[a, b]$ (انظر شكل ٧ – ٢) ، فكلما كانت المساحة أكبر ، كلما كان الخطأ الشامل أكبر



(شكل ٧ – ٢)

فى حين أن (7.8) طبيعية ومقبولة هندسياً ، إلا أن ظهور علامة المقياس يجعل الحسابات مزعجة بدرجة كافية حتّى أن معظم الرياضيين والعلماء يفضلون بصفة عامة القياس البديل التالى للخطأ ، والمسمى بمتوسط مربع الخطأ

$$\text{متوسط مربع الخطأ} = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

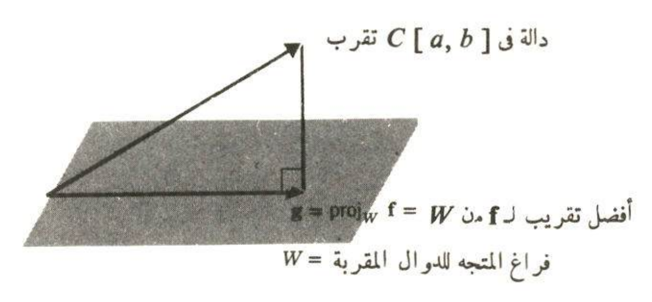
يمتاز متوسط مربع الخطأ بالمزية الاضافية التى تسمح لنا بالتقدم لتطبيق نظرية فراغات الضرب الداخلى فى مسائل التقريب . لنرى كيفية ذلك ، اعتبر الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx \tag{7.9}$$

على الفراغ الاتجاهى $C[a, b]$. بهذا الضرب الاتجاهى نحصل على

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$$

وتقرر هذه الصيغة أن متوسط مربع الخطأ الناتج من تقريب **f** بواسطة **g** على $[a, b]$ هو مربع المسافة بين **f**، **g** عندما ينظر إلى هاتين الدالتين كمتجهين فى $C[a, b]$ مع الضرب الداخلى (7.9) . لذلك فإن التقريب g من فراغ جزئى W للفراغ $C[a, b]$ يصغر متوسط مربع الخطأ إلى الحد الأدنى إذاً وفقط إذا كان هذا التقريب يصغر $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|^2$ إلى الحد الأدنى ، أو بصورة مكافئة ، إذا وفقط إذا كان يصغر $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|$ باختصار فإن التقريب **g** فى W الذى يصغر متوسط مربع الخطأ إلى الحد الأدنى يكون هو المتجه **g** فى W الأقرب إلى **f** باستخدام الضرب الداخلى (7.9) . ولكننا نعلم ماهو المتجه **g** من قبل ، أنه المسقط العمودى للمتجه **f** على الفراغ الجزئى W (انظر نظرية ٢٣ فى قسم ٤ – ٩ ، وشكل ٧ – ٣) . بإيجاز لدينا النتيجة التالية .



(شكل ٧ – ٣)

حل مسألة المربعات الصغرى : إذا كانت **f** دالة متصلة على $[a, b]$ وكان W فراغاً جزئياً منتهى البعد للفراغ $C[a, b]$ ، فإن الدالة **g** فى W التى تصغر متوسط مربع الخطأ

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$$

إلى الحد الأدنى تكون $\mathbf{g} = \text{proj}_W \mathbf{f}$ ، المسقط العمودى للدالة **f** على W بالنسبة إلى الضرب الداخلى (7.9).
تسمى الدالة $\mathbf{g} = \text{proj}_W \mathbf{f}$ **بتقريب المربعات الصغرى** من W للدالة **f** .

متسلسلة فورير :

تسمى أى دالة على الصورة

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx + d_1 \sin x + d_2 \sin 2x + \cdots + d_n \sin nx \qquad (7.10)$$

بكثيرة حدود مثلثية ، إذا لم يكن c_n ، d_n كلاهما مساو للصفر ، فيقال إن $t(x)$ ذات رتبة n

مثـــال (٣) :

$$t(x) = 2 + \cos x - 3\cos 2x + 7\sin 4x$$

كثيرة حدود مثلثية بثوابت

$$c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = -3, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, d_4 = 7$$

ورتبة $t(x)$ هى 4 .

واضح من (7.10) أن كثيرات الحدود ذات الرتبة n أو أقل ، تكون هى التركيبات الخطية المختلفة والممكنة من

$$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \ldots, \cos nx, \quad \sin x, \quad \sin 2x, \ldots, \sin nx \qquad (7.11)$$

لذلك فإن كثيرات الحدود المثلثية ذات الرتبة n أو أقل تشكل فراغاً جزئياً W للفراغ الاتجاهى للدوال المتصلة وبالتحديد الفراغ الجزئى المنشأ بالدوال ذات العدد $2n+1$ المدرجة فى (7.11) . يمكن إثبات أن هذه الدوال غير مرتبطة خطياً ، وبالتالى تشكل أساساً للفراغ W .

دعنا نعتبر مسألة تقريب دالة متصلة $f(x)$ على الفترة $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدوده مثلثية من رتبة n أو أقل . كما لاحظنا من قبل أن تقريب المربعات الصغرى للدالة $\mathbf{f}$ من W هو المسقط العمودى للدالة $\mathbf{f}$ على W . لإيجاد هذا المسقط العمودى ، يجب أن نجد أساسا عياريا متعامدا $\mathbf{g}_0$ ، $\mathbf{g}_1$ ، . . . ، $\mathbf{g}_{2n}$ للفراغ W ، وبعده يمكن حساب المسقط العمودى على W من الصيغة

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle \mathbf{g}_0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \cdots + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \mathbf{g}_{2n} \qquad (7.12)$$

(أنظر نظرية ٢٠ بالقسم ٤ – ٩) . يمكن الحصول على أساس عيارى متعامد للفراغ W بتطبيق عملية جرام – شميدت على الأساس (7.11) باستخدام الضرب الداخلى

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\, dx$$

يؤدى هذا (أنظر تمرين ٦) إلى الأساس العيارى المتعامد

$$\mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \ldots, \mathbf{g}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,$$

$$\mathbf{g}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \mathbf{g}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \qquad (7.13)$$

إذا اصطلحنا على الكتابة

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle, a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle, \ldots, a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle, \ldots, b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle$$

فإنه بالتعويض من (7.13) فى (7.12) نحصل على

$$\text{proj}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx] + [b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx]$$

حيث

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin x \, dx$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

باختصار

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ، b_1 ، b_2 ، ... ، b_n معاملات فورير * للدالة $\mathbf{f}$.

مثال (٤) :

أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = x$ على $[0, 2\pi]$ بواسطة .

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل

الحل :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = 2\pi$$

(*) جين بابتيست جوزيف فورير (١٧٦٨ ــ ١٨٣٠) عالم رياضيات وفيزياء فرنسى. اكتشف فورير متسلسلة فورير والأفكار المتعلقة بها عندما كان يعمل فى مسائل انتشار الحرارة يعتبر هذا الاكتشاف واحدا من أكثر الاكتشافات تأثيرا على تاريخ الرياضيات ، وهو حجر الزاوية لكثير من مجـــالات البحث الرياضى وأداة أساسية فى كثير من العلوم الهندسية .

قضى فورير وهو أحد السياسيين البارزين أثناء الثورة الفرنسية ، بعض الوقت فى الحبس بسبب دفاعه عن الكثيرين من الضحايا خلال فترة الارهاب ، بعد ذلك أصبح أحد أصفياء نابليون وكان يلقب بكلا اللقبين « بارون » و « كونت » .

بالنسبة إلى ... ,$k = 1, 2$ يعطى التكامل بالتجزئ (تحقق من ذلك)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\, dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\, dx = -\frac{2}{k} \qquad (7.14)$$

تقريب المربعات الصغرى للدالة x على $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل هو

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x$$

وإذن من (7.14) يكون التقريب هو

$$x \simeq \pi - 2\sin x - \sin 2x$$

(ب) تقريب المربعات الصغرى للدالة x على $[0, 2\pi]$ بواسطة كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل هو

$$x \simeq \frac{a_0}{2} + [a_1\cos x + \cdots + a_n\cos nx] + [b_1\sin x + \cdots + b_n\sin nx]$$

أو من (7.14) هو

$$x \simeq \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right)$$

من الطبيعى أن نتوقع أن متوسط مربع الخطأ سيتضاءل بتزايد عدد الحدود فى تقريب المربعات الصغرى

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

يمكن إثبات أن متوسط مربع الخطأ يقترب من الصفر عندما $n \to +\infty$ ويرمز لهذا بكتابة

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

يسمى الطرف الأيمن لهذه المعادلة بمتسلسلة فورير للدالة f . لمثل هذه المتسلسلات أهمية بالغة فى الهندسة والعلوم ، والرياضيات .

تمارين ٧ — ٢

١ – أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = 1 + x$ على الفترة $[0, 2\pi]$ بواسطة

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 2 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل

٢ – أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $f(x) = x^2$ على الفترة $[0,2\pi]$ بواسطة

(أ) كثيرة حدود مثلثية من رتبة 3 أو أقل

(ب) كثيرة حدود مثلثية من رتبة n أو أقل .

٣ – (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة x على الفترة $[0, 1]$ بواسطة دالة على الصورة $a+be^x$
(ب) أوجد متوسط مربع الخطأ فى التقريب .

٤ – (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة e^x على الفترة $[0, 1]$ بواسطة كثيرة حدود على الصورة $a_0 + a_1 x$
(ب) أوجد متوسط مربع الخطأ فى التقريب .

٥ – (أ) أوجد تقريب المربعات الصغرى للدالة $\sin \pi x$ على الفترة $[-1, 1]$ بواسطة كثيرة حدود على الصورة $a_0 + a_1x + a_2x^2$
(ب) أوجد متوسط مربع الخطأ فى التقريب .

٦ – استخدم عملية جرام – شميدت للحصول على الأساس العيارى المتعامد (7.13) من الأساس (7.11).

٧ – إجر التكاملات الموجودة فى (7.14) .

٨ – أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x) = \pi - x$

٧ – ٣ الصيغ التربيعية – تطبيق فى القطوع المخروطية

فى هذا القسم ، نطبق نتائجنا عن تحويلات الإحداثيات المتعامدة فى دراسة معادلات الدرجة الثانية . والصيغ التربيعية والقطوع المخروطية . تظهر الصيغ التربيعية فى أنواع مختلفة من المسائل الهامة المتعلقة بمجالات متباينة مثل الذبذبات والنظرية النسبية والهندسة والإحصاء .

تسمى معادلة من الدرجة الثانية فى x ، y أى معادلة على الصورة .

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (7.15)$$

حيث تكون a ، b ، .... ، f أعدادا حقيقية ويكون أحد الأعداد a ، b ، c على الأقل غير مساو للصفر . والتعبير

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

يسمى الصيغة التربيعية المرافقة .

مثال (١٥) :

فى معادلة الدرجة الثانية

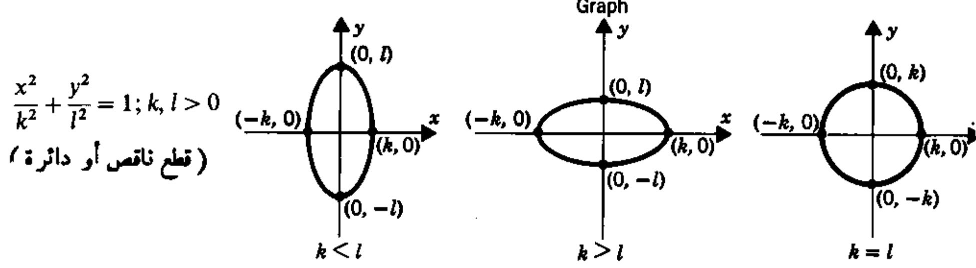
$$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$$

تكون الثوابت البينة فى (7.15) هى

$$a = 3 \quad b = \tfrac{5}{2} \quad c = -7 \quad d = 2 \quad e = 0 \quad f = 7$$

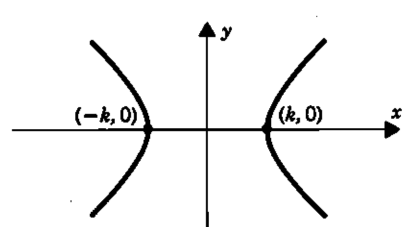
$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1; k, l > 0$

(قطع ناقص أو دائرة)



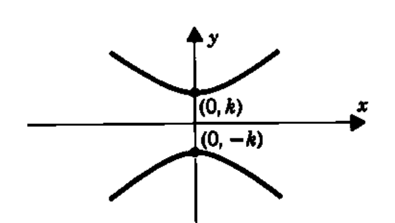
$\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1; k, l > 0$

(قطع زائد)



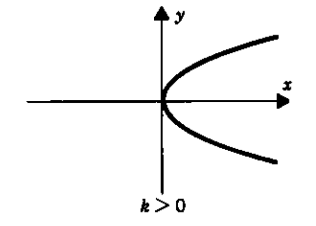
$\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1; k, l > 0$

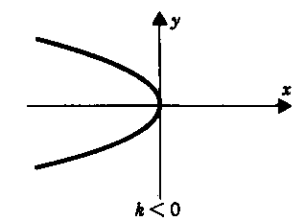
(قطع زائد)

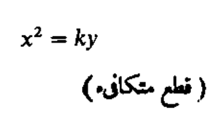


$y^2 = kx$

(قطع متكافىء)

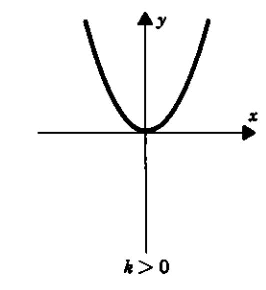


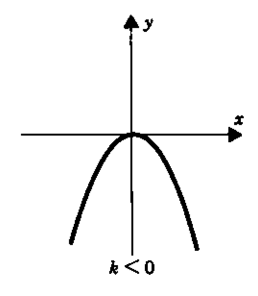




$x^2 = ky$

(قطع متكافىء)





(شكل ٧ − ٤)

مثـال (١٦) :

الصيغة التربيعية المرافقة	معادلة الدرجة الثانية
$3x^2 + 5xy - 7y^2$	$3x^2 + 5xy - 7y^2 + 2x + 7 = 0$
$4x^2 - 5y^2$	$4x^2 - 5y^2 + 8y + 9 = 0$
xy	$xy + y = 0$

الرسوم البيانية للمعادلات من الدرجة الثانية فى x ، y تسمى **قطوعاً مخروطية**. وأهم القطوع المخروطية هى القطوع الناقصة والدوائر والقطوع الزائدة والقطوع المتكافئة ، وتسمى هذه القطوع بالقطوع المخروطية غير المنحلة تسمى باقى القطوع بالقطوع المخروطية المنحلة وتتضمن نقاطا منفردة وأزواجا من الخطوط المستقيمة (أنظر تمرين ١٣) .

يقال أن القطع المخروطى غير المنحل فى **الوضع القياسى** بالنسبة إلى محاور الاحداثيات إذا أمكن التعبير عن معادلته بإحدى الصيغ المعطاة فى شكل ٧ - ٤ .

مثـال (١٧) :

المعادلة

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ على الصورة $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$ حيث $k = 2$ ، $l = 3$

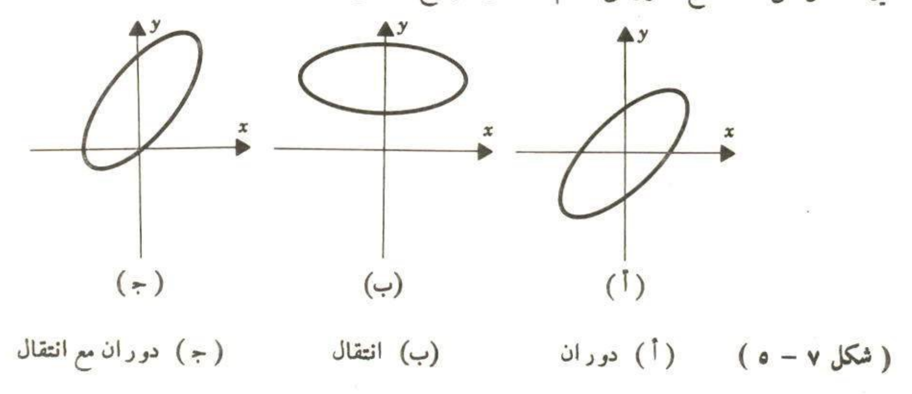
ولذلك فيكون رسمها البيانى قطعا ناقصا فى الوضع القياسى والذى يقطع محور x عند $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ويقطع محور y عند $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

يمكن كتابة المعادلة $x^2 - 8y^2 = -16$ بالصورة $y^2/2 - x^2/16 = 1$ والتى تكون على الصورة $y^2/k^2 - x^2/l^2 = 1$ حيث $k = \sqrt{2}$، $l=4$ ولذلك فيكون رسمها البيانى قطعا زائدا فى الوضع القياسى والذى يقطع محور y عند $(0, -\sqrt{2})$ ، $(0, \sqrt{2})$.

المعادلة $5x^2 + 2y = 0$ يمكن كتابتها بمثابة $x^2 = -\frac{2}{5}y$ والتى تكون على الصورة $x^2 = ky$ مع $k = -\frac{2}{5}$. حيث أن $k<0$ ، فإن الرسم البيانى للمعادلة يكون قطعا مكافئا فى الوضع القياسى مفتوحا إلى تحت.

لاحظ أن أى قطع مخروطى فى الوضع القياسى ليس له حد xy (يسمى **حد ضرب تقاطعى**) فى معادلته ، يدل وجود حد xy فى معادلة القطع المخروطى غير المنحل على أن القطع المخروطى قد تم تدويره عن الوضع القياسى (أنظر شكل ٧ - ٥ أ) . لاحظ أيضاً ، أن أى قطع مخروطى فى الوضع القياسى ليس له الحدان

x^2 ، x معا أو الحدان y^2 ، y معا عادة ما يدل وجود أى من هذين الزوجين فى معادلة القطع المخروطى غير المنحل على أن القطع المخروطى قد تم نقله من الوضع القياسى (أنظر شكل ٧ — ٥ ب) .



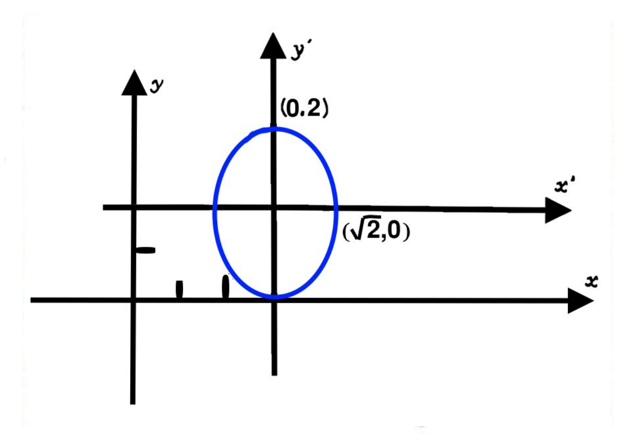
(شكل ٧ — ٥) (أ) دوران (ب) انتقال (ج) دوران مع انتقال

إحدى وسائل التعرف على الرسم البيانى لقطع مخروطى غير منحل وليس فى الوضع القياسى تتكون من تدوير ونقل محاور الاحداثيات xy لنحصل على نظام أحداثيات $x' y'$ والذى يكون القطع المخروطى بالنسبة له فى الوضع القياسى . حالما يتم عمل ذلك يصبح معادلة القطع المخروطى فى النظام $x' y'$ على إحدى الصور المعطاة فى شكل ٧ — ٤ ومن ثم يمكن التعرف على الرسم البيانى بسهولة .

مثـال (١٨) :

حيث أن معادلة الدرجة الثانية

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$$



(شكل ٧ — ٦)

تحوى الحدود x^2، x ، y^2 ، y ولكن لا تحوى حد ضرب تقاطعى ، فيكون رسمها البيانى قطعا مخروطيا منقولا من الوضع القياسى ، ولكن ليس مدارا . يمكن إعادة هذا القطع إلى الوضع القياسى بنقل محاور الأحداثيات . لعمل ذلك تجمع أولا حدود x وحدود y أى نكتب

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$$

أو

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

باكمال المربع * على كل من العبارتين داخل الأقواس ، نحصل على

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

أى

$$2(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \tag{7.16}$$

إذا نقلنا محاور الاحداثيات باستخدام معادلات الانتقال

$$x' = x - 3 \qquad y' = y - 2$$

(أنظر مثال ٣ فى قسم ٣ - ١) ، فإن (7.16) تصبح

$$2x'^2 + y'^2 = 4$$

أى

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص فى الوضع القياسى فى النظام $x'y'$. هذا القطع الناقص مرسوم رسما تخطيطيا فى شكل ٧ - ٦ .

نتدبر الآن كيفية التعرف على القطوع المخروطية التى تم تدويرها عن الوضع القياسى. بالنسبة لبقية هذا الكتاب ، سنتبع عرفا معتادا بحذف الأقواس من كل المصفوفات من النوع 1×1 . فيمكن للرمز 8 أن يدل إما على العدد 8 أو على المصفوفة من النوع 1×1 والتى عنصرها هو العدد 8 سيكون من الممكن دائما من النص معرفة أيهما المعنى بذلك . بهذا التعرف ، يمكن كتابة (7.15) بصيغة المصفوفات كما يلى

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

أو

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \tag{7.17}$$

حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad K = [d \quad e]$$

* لاكمال مربع على عبارة فى الصورة $x^2 + px$ أضف واطرح الثابت $(p/2)^2$ لتحصل على

$$x^2 + px = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

بهذا الاصطلاح تكون الصيغة التربيعية المرافقة للمعادلة (7.17) هى

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$$

تسمى المصفوفة المتماثلة A بمصفوفة الصيغة التربيعية $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$.

مثال (١٩) :

مصفوفات الصيغ التربيعية

$$8x^2 - 4y^2 \quad و \quad 3x^2 + 5xy + 7y^2$$

هى

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

اعتبر قطعا مخروطياً بالمعادلة

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0 \qquad (7.18)$$

سنبين الآن أنه من الممكن تدوير محاور الأحداثيات $x\ y$ بحيث لايكون لمعادلة القطع المخروطى فى نظام الأحداثيات $x'\ y'$ حد ضرب تقاطعى

خطوة (١) أوجد مصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

تحول A عموديا إلى الصورة القطرية .

خطوة (٢) أبدل عمودى P ، إذا لزم ذلك ، لجعل $\det(P) = 1$. يؤكد هذا أن تحويل الأحداثيات العمودى

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ أى أن } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (7.19)$$

يكون دورانا (أنظر قسم ٤ - ١٠) .

خطوة (٣) للحصول على معادلة C فى النظام $x'\ y'$ عوض من (7.19) فى (7.18) يؤدى هذا إلى

$$(P\mathbf{x}')^t A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + f = 0$$

أو

$$\mathbf{x}'^t(P^t AP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + f = 0 \qquad (7.20)$$

حيث أن P تحول A عموديا إلى الصورة القطرية

$$P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

حيث λ_1 ، λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A . لذلك فيمكن كتابة (7.20) كما يلى

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + f = 0$$

أو

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

(حيث $d' = dp_{11} + ep_{21}$ ، $e' = dp_{12} + ep_{22}$). ليس لهذه المعادلة حد ضرب تقاطعى .

تلخص النظرية التالية هذا النقاش .

نظرية ٩ : (نظرية المحاور الأساسية بالنسبة إلى $\mathbb{R}^2$) . لتكن

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

معادلة قطع مخروطى C ، ولتكن

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

الصيغة التربيعية المرافقة . محاور الأحداثيات يمكن تدويرها بحيث يكون لمعادلة C فى نظام الأحداثيات الجديد $x'y'$ الصيغة

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

حيث λ_1 ، λ_2 هما القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A. يمكن إنجاز الدوران بواسطة التعويض

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

حيث P تحول A عموديا إلى الصورة القطرية وحيث $\det(P) = 1$.

مثال (٢٠) :

صف القطع المخروطى C الذى معادلته هى $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

الحل : صيغة المصفوفات لهذه المعادلة هى

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} - 36 = 0 \qquad (7.21)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة للمصفوفة A هى

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix}\lambda - 5 & 2\\ 2 & \lambda - 8\end{bmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

وإذن القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A هما $\lambda = 4$ ، $\lambda = 9$.

المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda = 4$ هى الحلول غير الصفرية للنظام

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أساس للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda=4$. نجعل هذا المتجه عياريا لحصول على أساس عيارى متعامد لهذا الفراغ الذاتى ، فنحصل على

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

بالمثل يكون

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

أساساً عياريا متعامدا للفراغ الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 9$

وإذن فالمصفوفة

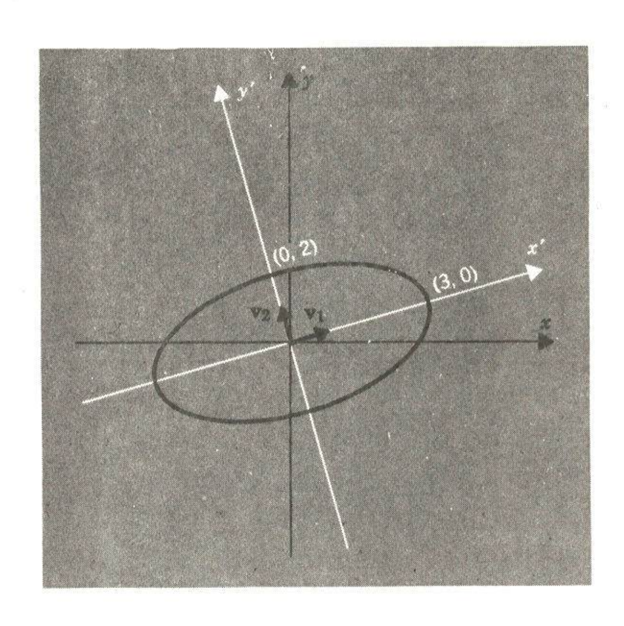
$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

تحول A عموديا إلى الصورة القطرية . بالإضافة إلى ذلك ، فإن $\det(P)=1$ وعليه فإن التحويل العمودى للاحداثيات

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}' \qquad (7.22)$$

يكون دورانا . بالتعويض من (7.22) فى (7.21) نحصل على

$$(P\mathbf{x}')^t A(P\mathbf{x}') - 36 = 0$$



(شكل ٧ – ٧)

أو

$$(\mathbf{x}')^t(P^tAP)\mathbf{x}' - 36 = 0$$

وحيث أن

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

فهذه المعادلة يمكن كتابتها

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

أو

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

هذه المعادلة يمكن أيضاً كتابتها

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة القطع الناقص المرسوم رسما تخطيطيا فى شكل ٧ – ٧ .

مثال (٢١) :

صف القطع المخروطي C الذي معادلته هي

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

الحل : صيغة المصفوفات لهذه المعادلة هي

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + 4 = 0 \qquad (7.23)$$

حيث

$$K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

كما تبين في مثال ٢٠

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

تحول A عموديا إلى الصورة القطرية . تعويض $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ في (7.23) نحصل على

$$(P\mathbf{x}')^t A(P\mathbf{x}') + K(P\mathbf{x}') + 4 = 0$$

أو

$$(\mathbf{x}')^t(P^tAP)\mathbf{x}' + (KP)\mathbf{x}' + 4 = 0 \qquad (7.24)$$

حيث أن

$$KP = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [-8, -36] \quad \text{و} \quad P^tAP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

فيمكن كتابة (7.24) بالصورة

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \qquad (7.25)$$

لإعادة القطع المخروطي إلى الوضع القياسي، يجب أن تنقل المحاور $x'y'$. باتباع طريقة مثال ١٨ نعيد كتابة (7.25) بالصورة

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') = -4$$

إكمال المربعين يؤدي إلى

$$4(x'^2 - 2x' + 1) + 9(y'^2 - 4y' + 4) = -4 + 4 + 36$$

أو

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 = 36 \qquad (7.26)$$

إذا نقلنا محاور الأحداثيات بواسطة معادلات الانتقال

$$x'' = x' - 1 \qquad y'' = y' - 2$$

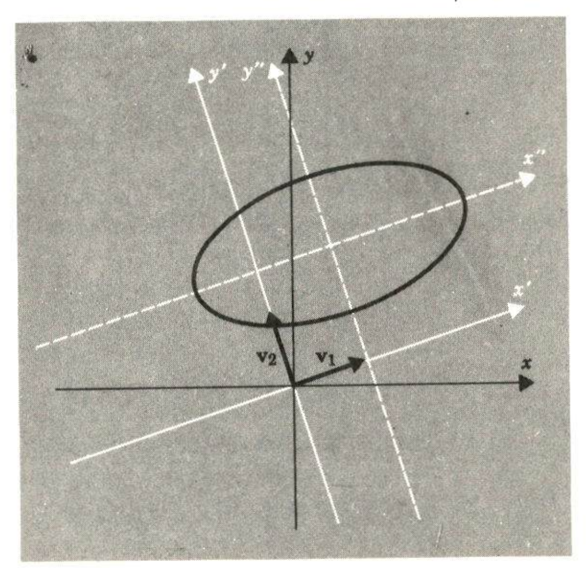
فإن (7.26) تصبح على الصورة

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36$$

أو

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

وهذه معادلة القطع الناقص المرسوم رسما تخطيطيا فى شكل ٧ – ٨ .



(شكل ٨ – ٧)

تمارين ٧ — ٣

١ – أوجد الصيغ التربيعية المرافقة لمعادلات الدرجة الثـــانية التالية .

(أ) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$

(ب) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$

(جـ) $5xy = 8$

(د) $4x^2 - 2y^2 = 7$

(هـ) $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

٢ – أوجد مصفوفات الصيغ التربيعية فى تمرين ١ .

٣ – عبر عن كل معادلة من الدرجة الثانية فى تمرين ١ بصيغة المصفوفات $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + f = 0$.

٤ – كل من القطوع المخروطية التالية

(أ) $2x^2 + 5y^2 = 20$ (ب) $4x^2 + 9y^2 = 1$

(جـ) $x^2 - y^2 - 8 = 0$ (د) $4y^2 - 5x^2 = 20$

(هـ) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ (و) $7y^2 - 2x = 0$

(ز) $-x^2 = 2y$ (ح) $3x - 11y^2 = 0$

(ط) $y - x^2 = 0$ (ى) $x^2 - 3 = -y^2$

٥ – فى كل جزء سيضع انتقال ما القطع المخروطى فى الوضع القياسى . اذكر اسم القطع المخروطى واعط معادلته بالنسبة إلى نظام الأحداثيات المنقول .

(أ) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$

(ب) $x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$

(جـ) $y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$

(د) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

(هـ) $2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$

(و) $x^2 + 10x + 7y = -32$

٦ – القطوع المخروطية غير المنحلة التالية مدارة عن الوضع القياسى . فى كل جزء أدر محاور الأحداثيات لتزيل الحد xy . أذكر إسم القطع المخروطى واعط معادلته بالنسبة إلى نظام الإحداثيات المدار .

(أ) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$ (ب) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

(جـ) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ (د) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

فى التمارين من ٧ إلى ١٢ انقل وأدر محاور الأحداثيات ، إذا لزم ذلك، لتضع القطع المخروطى فى الوضع القياسى . اذكر اسم القطع ، واعط معادلته فى نظام الأحداثيات النهائى .

٧ – $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y = 5$

٨ – $3x^2 - 8xy - 12y^2 - 30x - 64y = 0$

٩ – $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$

١٠ – $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

١١ – $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$

١٢ – $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

١٣ – يمكن لمنحنى معادلة من الدرجة الثانية فى x ، y فى حالات معينة ، أن يكون إما نقطة أو خط مستقيم أو زوجا من الخطوط المستقيمة . وهذه تسمى بالقطوع المخروطية المنحلة . ويمكن أيضاً أن لا تتحقق المعادلة بأى قيم حقيقية للمتغيرين x ، y فى مثل هذه الحالات لا يكون للمعادلة أى شكل

بيانى ، ويقال أنها تمثل قطعاً مخروطياً تخيلياً   المعادلات التالية تمثل قطوعا منحلة أو تخيلية . كلما كان ممكنا ، ارسم شكلا تخطيطيا .

(أ) $x^2 - y^2 = 0$ (ب) $x^2 + 3y^2 + 7 = 0$

(جـ) $8x^2 + 7y^2 = 0$ (د) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

(هـ) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0$ (و) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5$

٧ ــ ٤ الصيغ التربيعية ــ تطبيق على سطوح الدرجة الثانية

فى هذا القسم نعمم طرائق القسم السابق إلى معادلات الدرجة الثانية فى ثلاثة متغيرات .

أية معادلة على الصورة

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad (7.27)$$

حيث a ، b ، . . . ، f ليست كلها أصفارا ، تسمى معادلة من الدرجة الثانية فى x ، y ، z ويسمى التعبير

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

بالصيغة التربيعية المرافقة .

يمكن كتابة (7.27) بصيغة المصفوفات

$$[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \quad h \quad i]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

أى

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + K\mathbf{x} + j = 0$$

حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \qquad K = [g \quad h \quad i]$$

تسمى المصفوفة المتماثلة A مصفوفة الصيغة التربيعية

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

مثال (٢٢) :

الصيغة التربيعية المرافقة لمعادلة الدرجة الثانية

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

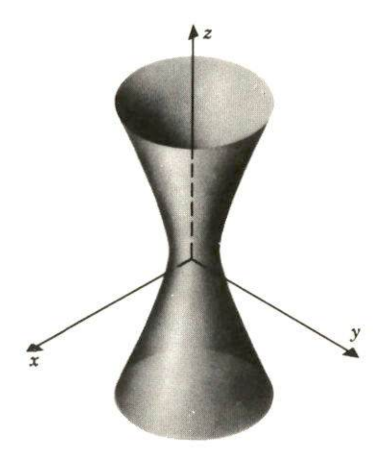
هى

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$$

ومصفوفة هذه الصيغة التربيعية هى

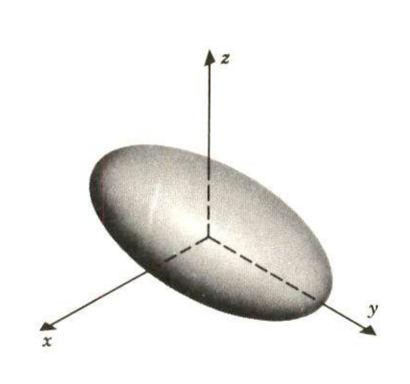
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

رسومات المعادلة التربيعية فى x ، y ، z تسمى **سطوح الدرجة الثانية** . نعطى الآن بعض الأمثلة



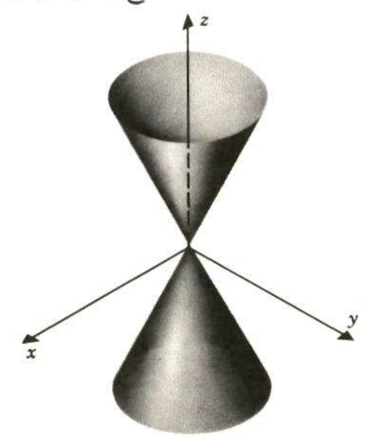
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح زائدى ذو طية واحدة



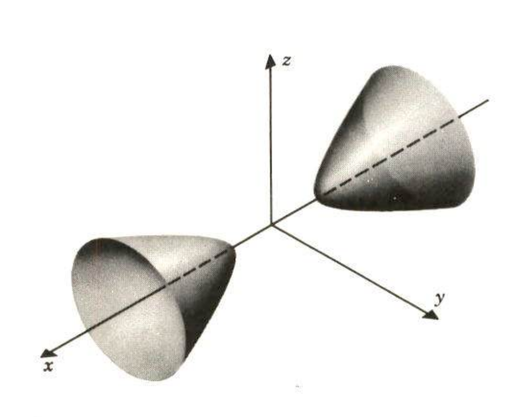
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح ناقصى



$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$$

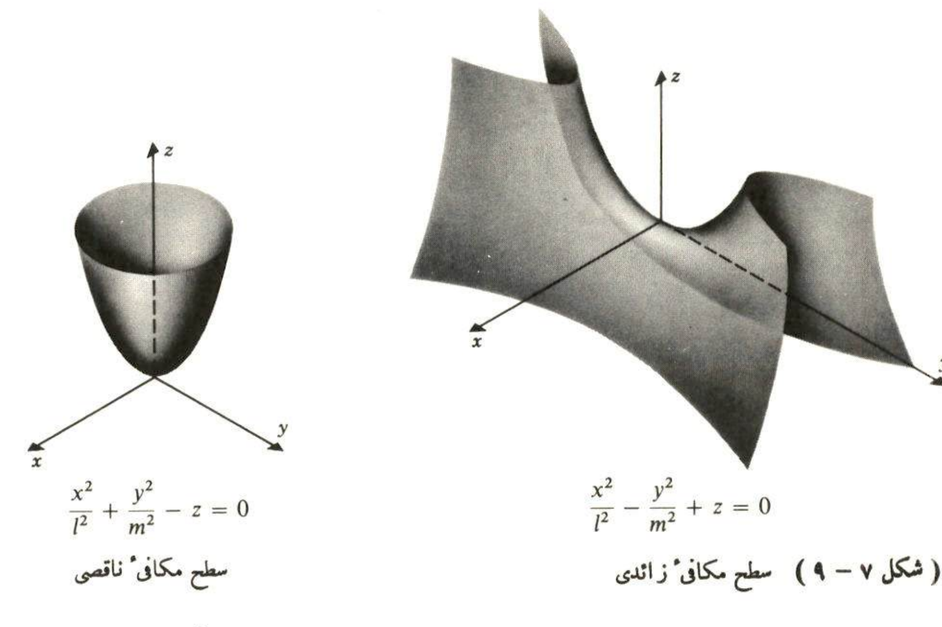
مخروط ناقصى



$$\frac{x^2}{l^2} \frac{y^2}{m^2} \frac{z^2}{n^2} = 1$$

سطح زائدى ذو طيتين

(شكل ٧ – ٩)



$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} + z = 0$$

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - z = 0$$

(شكل ٧ – ٩) سطح مكافئ زائدى   سطح مكافئ ناقصى

سطح الدرجة الثانية معادلته فى إحدى الصور المعطاة فى شكل ٧ – ٩ يقال أنه فى **الوضع القياسى** بالنسبة إلى محاور الأحداثيات . يدل ظهور واحد أو أكثر من حدود الضرب xy ، xz ، yz فى معادلة سطح من الدرجة الثانية غير منحل على أن السطح قد أدير عن الوضع القياسى ، وظهور كلا الحدين x^2 ، x أو الحدين y^2 ، y أو الحدين z^2 ، z يدل عادة على أن السطح قد نقل من الوضع القياسى .

مثال (٢٣) :

صف سطح الدرجة الثانية الذى معادلته هى

$$4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$$

الحل : إعادة ترتيب الحدود تعطى

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

إكمال المربعات يعطى

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

أى

$$4(x - 2)^2 + 36(y - 3)^2 - 9z^2 = 36$$

أى

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y - 3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

نقل المحاور بواسطة معادلات الانتقال

$$x' = x - 2 \qquad y' = y - 3 \qquad z' = z$$

يعطى

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = 1$$

وهى معادلة سطح زائدى ذى طية واحدة .

توضح النتيجة التالية أنه من الممكن دائماً حذف حدود الضرب من معادلة سطح الدرجة الثانية بدوران محاور الأحداثيات .

نظرية ١٠ : (نظرية المحاور الأساسية فى الفراغ R^3) : لتكن

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad (7.28)$$

هى معادلة سطح من الدرجة الثانية Q ولتكن

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

هى الصيغة التربيعية المرافقة . يمكن دوران محاور الأحداثيات بحيث أن معادلة السطح Q فى نظام الأحداثيات $x'y'z'$ تكون على الصورة

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0 \qquad (7.29)$$

حيث λ_1 ، λ_2 ، λ_3 القيم الذاتية للمصفوفة A . يمكن إنجاز الدوران بواسطة التعويض

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

حيث P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية و $det\,(P)=1$.

هذه النظرية تقترح الطريقة التالية لإزالة حدود الضرب من معادلة الدرجة الثانية فى x ، y ، z .

خطوة (١) : أوجد مصفوفة P تحول A عمودياً إلى الصورة القطرية .

خطوة (٢) : أبدل عمودين من P إذا لزم ذلك ، لجعل $\det(P) = 1$ يؤكد هذا أن تحويل الأحداثيات العمودى

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (7.30)$$

يكون دورانا .

خطوة (٣) : عوض (7.30) فى (7.29)

برهان أن المعادلة الجديدة تكون على الصورة (7.29) يماثل البرهان المعطى فى القسم السابق ، ويترك هذا كتمرين .

مثـــال (٢٤) :

صف سطح الدرجة الثانية الذى معادلته

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

الحـــل : صيغة المصفوفات لمعادلة الدرجة الثانية السابقة هى

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} - 3 = 0 \qquad (7.31)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

كما تبين فى مثال (١٣) بقسم ٦ - ٣ ، القيم الذاتية للمصفوفة A هى $\lambda = 2$ ، $\lambda = 8$ وتكون A قابلة للتحويل العمودى إلى الصورة القطرية بواسطة المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

حيث متجها العمودين الأولين فى P هما متجهان ذاتيان مناظران للقيمة $\lambda = 2$ ومتجه العمود الثالث هو متجه ذاتى مناظر للقيمة $\lambda = 8$.

حيث أن $\det(P) = 1$ (حقق ذلك) ، فإن تحويل الأحداثيات العمودى

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}', \text{ that is, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (7.32)$$

يكون دوراناً .

تعويض (7.32) فى (7.31) يعطى

$$(P\mathbf{x}')^t A(P\mathbf{x}') - 3 = 0$$

أو بصورة مكافئة

$$(\mathbf{x}')^t(P^tAP)\mathbf{x}' - 3 = 0 \qquad (7.33)$$

حيث أن

$$P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

فإن (7.33) تصبح

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 3 = 0$$

أى

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x'^2}{3/2} + \frac{y'^2}{3/2} + \frac{z'^2}{3/8} = 1$$

وهى معادلة سطح ناقص .

تمارين ٧ — ٤

١ — أوجد الصيغ التربيعية المرافقة لمعادلات الدرجة الثانية التالية :

(أ) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3$

(ب) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$

(جـ) $xy + xz + yz = 1$

(د) $x^2 + y^2 - z^2 = 7$

(هـ) $3z^2 + 3xz - 14y + 9 = 0$

(و) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$

٢ — أوجد مصفوفات الصيغ التربيعية فى تمرين (١) .

٣ — عبر عن كل معادلة من معادلات الدرجة الثانية فى تمرين (١) بصيغة المصفوفات $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + k\mathbf{x} + f = 0$.

٤ — اذكر أسماء سطوح الدرجة الثانية التالية :

(أ) $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

(ب) $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$

(جـ) $6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0$

(د) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

(هـ) $16x^2 + y^2 = 16z$

(و) $7x^2 - 3y^2 + z = 0$

(ز) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

٥ — عين فى كل جزء معادلات الانتقال التى ستضع سطح الدرجة الثانية فى الوضع القياسى. اذكر اسم السطح :

(أ) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$

(ب) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$

(جـ) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

(د) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$

(هـ) $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$

(و) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$

(ز) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$

٦ – أوجد فى كل جزء دوراناً $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ يزيل حدود الضرب . اذكر اسم السطح واعط معادلته فى النظام $x'\ y'\ z'$.

(أ) $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 7xz + 150 = 0$

(ب) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$

(جـ) $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$

(د) $2xy + z = 0$

فى التمارين من ٧ إلى ١٠ أنقل وأدر محاور الأحداثيات لتضع سطح الدرجة الثانية فى الوضع القياسى – اذكر اسم السطح واعط معادلته فى نظام الأحداثيات النهائى .

٧ – $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = -9$

٨ – $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

٩ – $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

١٠ – $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

١١ – برهن نظرية (١٠) .

٨- مقدمة فى الطرق العددية للجبر الخطى

٨ ــ ١ طريقة جاوس للحذف بالتركيز المحورى

سنناقش فى هذا القسم بعض الجوانب العملية لحل أنظمة من n من المعادلات فى n من المجاهيل. عملياً، غالباً ماتحل أنظمة المعادلات الخطية على الحاسبات الألكترونية العددية . حيث أن الحاسبات الألكترونية محدودة بعدد أماكن الكسور العشرية التى يمكن أن تحملها ، فإنها تقرب أو تبتّر معظم المقادير العددية على سبيل المثال ، فالحاسب الألكترونى المصمم لتخزين ثمانية أماكن للكسور العشرية قد يسجل 2/3 أما بمثابة 66666667. (مقرب) أو 66666666. (مبتور) . فى كل حالة ، ينتج خطأ سنسميه **خطأ التقريب** .

الاعتبارات العملية الأساسية فى حل أنظمة المعادلات الخطية على الحاسبات الألكترونية العددية هى :

١ ــ التصغير إلى الحد الأدنى عدم الدقة الناتجة من خطأ التقريب الرقى .

٢ ــ التصغير إلى الحد الأدنى الوقت (وبالتالى التكلفة) اللازم لحصول على الحل .

باستثناء الحالات التى يكون فيها لمصفوفة المعاملات تركيب خاص (على سبيل المثال ، عدد ضخم من الأصفار) ، فعادة ماتكون طريقة جاوس لحذف هى الطريقة المثلى لحل النظام . نقدم فى هذا القسم تعديلا بطريقة جاوس فى الحد مصمم لتصغير تأثير خطأ التقريب الرقى إلى الحد الأدنى .

تنجز معظم حسابات الحاسب الألكترونى باستخدام **أعداد النقط العائمة العيارية**. هذا يعنى الأعداد المعبر عنها بالصورة *

$$\pm M \times 10^{k} \tag{8.1}$$

حيث k عدد صحيح و M كسر يحقق

$$.1 \le M < 1$$

الكسر M يسمى **القيمة العشرية** للعدد .

(*) تبدل معظم الحاسبات الالكترونية اعدادالكسور العشرية (للاساس 10) الى أعداد كسور ثنائية (للاساس 2) مع ذلك ، للتبسيط ، سوف نفكر بدلالة الكسور العشرية .

مثـــال (١) :

نعبر عن الأعداد التالية فى صورة النقط العائمة العيارية :

$$73 = .73 \times 10^2$$
$$-.000152 = -.152 \times 10^{-3}$$
$$1{,}579 = .1579 \times 10^4$$
$$-1/4 = -.25 \times 10^0$$

أعداد الأماكن العشرية فى القيمة العشرية للعدد والحجم المسموح به للأس k فى (8.1) تعتمد على الحاسب الألكترونى المستخدم . على سبيل المثال ، فالحاسب **IBM 360** يخزن مايكافىء سبعة أرقام فى القيمة العشرية للعدد ويسمح للعدد 10^k بمدى من 10^{-75} إلى 10^{75}. الحاسب الذى يستخدم n مكاناً عشرياً فى القيمة العشرية للعدد يقال إنه يقرب الأعداد إلى n رقم معنوى .

مثـــال (٢) :

الأعداد التالية مقربة إلى ثلاثة أرقام معنوية :

العدد	صورة النقطة العائمة العيارية	القيمة المقربة
7/3	$.233 \times 10^1$	2.33
1,758	$.176 \times 10^4$	1,760
.0000092143	$.921 \times 10^{-5}$	.00000921
−.12	$-.120 \times 10^0$	−.12
13.850	$.138 \times 10^2$	13.8
−.08495	$-.850 \times 10^{-1}$	−.085

(إذا حدث ، كما فى الحالتين الأخيرتين ، وكان الجزء الذى يحذف فى عملية التقريب هو بالضبط نصف الوحدة ، فإننا سنختار اصطلاح التقريب بحيث يكون آخر رقم متبق زوجياً . عملياً ، تختلف معاملة هذه الحالة من حاسب لآخر) .

سنقدم الآن تعديلا لطريقة جاوس للحذف تسمى **التركيز المحورى** أو **طريقة جاوس للحذف باستخدام محور الحذف** ؛ تصمم هذه الطريقة لتصغير التأثير المتراكم لخطأ التقريب الرقى فى حل n من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل وذلك للحد الأدنى . نفترض أن النظام له حل وحيد . ونحن نصف كل خطوة فإننا سنوضح الفكرة باستخدام المصفوفة الممتدة للنظام :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

خطوة (١) : أوجد فى العمود أقصى اليسار عنصراً يكون له أكبر قيمة مطلقة .

يسمى هذا العنصر عنصراً محورياً .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ (6) & 6 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

عنصر محـــورى

عمود أقصى اليسار

خطوة (٢) : أجر عملية تبديل صفوف ، إذا لزم ذلك ، لنقل العنصر المحورى إلى قيمة العمود

تم تبديل الصـــفين الاول والثـــانى للمصفوفة السابقة

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

خطوة (٣) : إذا كان العنصر المحورى هو a اضرب صف القمة فى $1/a$

تم ضرب الصـــف الاول للمصفوفة السابقة فى $1/6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

خطوة (٤) : أضف مضاعفات مناسبة لصف القمة إلى الصفوف التى تحته بحيث أن جميع العناصر تحت قة العمود المحدد فى خطوة (١) تصبح أصفاراً .

تم طرح ثلاثة أمثال الصـــف الاول فى المصفوفة السابقة من الصفين الثانى والثـــالث

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

خطوة (٥) : غط صف القمة فى المصفوفة وابدأ مرة أخرى بخطوة (١) ، مطبقاً ذلك على المصفوفة الجزئية المتبقية . استمر فى هذا الطريق حتى تكون المصفوفة بأكلها فى الصورة الصفية المميزة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & (-5) & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

عنصر محـــورى

عمود غير صفرى أقصى اليسار فى المصفوفة الجزئيـــة

تم تبـــديل الصفين الاول والثـــانى للمصفوفة الجزئية

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

تم ضرب الصـــف الاوّل للمصـــفوفة الجزئية فى $-1/5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

تمت اضافة الصف الاول للمصفوفة الجزئية الى الصف الثانى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & -6 \end{bmatrix}$$

تمت تغطية الصف الاول للمصفوفة الجزئية وعدنا مرة اخرى للخطوة ١

عنصر محورى

عود أقصى اليسار فى المصفوفة الجزئية الجديدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

تم ضرب الصف الاول للمصفوفة الجزئية الجديدة فى $-1/2$

وتكون المصفوفة بأكلها الآن فى الصورة الصفية المميزة .

خطوة (٦) : حل نظام المعادلات المناظر بالتعويض الخلفى .

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 2 \\ x_2 \qquad\quad &= -1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

الحل بالتعويض الخلفى يعطى

$$x_3 = 3 \qquad x_2 = -1 \qquad x_1 = 2$$

حيث أن الحسابات السابقة حسابات مضبوطة فهذا المثال لايوضح مدى تأثير التركيز المحورى على اختزال خطأ التقريب الرقمى يوضح المثال التالى ذلك .

مثـال (٣) :

حل النظام التالى بواسطة طريقة جاوس لحذف المحورى . بعد كل خطوة حساب قرب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية .

$$\begin{aligned} .00044x_1 + .0003x_2 - .0001x_3 &= .00046 \\ 4x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 1.5 \\ 3x_1 - \ 9.2x_2 - \ .5x_3 &= -8.2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

الحـل : (باستخدام الحذف المحورى) : المصفوفة الممتدة هى

$$\begin{bmatrix} .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

لنقل العنصر المحورى إلى قمة العمود الأول ، تبدل الصفين الأول والثانى ، وهذا يعطى

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الأول على **4** تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ .00044 & .0003 & -.0001 & .00046 \\ 3 & -9.2 & -.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

طرح .00044 ــ مثل الصف الأول من الثانى ، ثلاثة أمثال الصف الأول من الثالث يعطى (بعد التقريب إلى ثلاثة أرقام معنوية) ،

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \end{bmatrix}$$

تبديل الصفين الثانى والثالث يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \\ 0 & .000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الثانى على **9.95 —** تعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & -.000190 & -.00021 & .000295 \end{bmatrix}$$

إضافة **.000190** مثل الصف الثانى إلى الثالث يعطى

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & -.000234 & .000117 \end{bmatrix}$$

قسمة كل عنصر فى الصف الثالث على **000234 –** تعطى الصورة الصفية المميزة

$$\begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .375 \\ 0 & 1 & .126 & .937 \\ 0 & 0 & 1 & -.5 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + .25x_2 + .25x_3 &= .375 \\ x_2 + .126x_3 &= .937 \\ x_3 &= -.5 \end{aligned}$$

الحل بالتعويض الخلفى يعطى (لثلاثة أرقام معنوية)

$$x_1 = .250 \qquad x_2 = 1.00 \qquad x_3 = -.500 \tag{8.3}$$

إذا حل النظام (8.2) بطريقة جاوس العادية للحذف (غير المحورية) وقربت كل خطوة حساب إلى ثلاثة أرقام معنوية ، نحصل على (حذفت التفاصيل)

$$x_1 = .245 \qquad x_2 = 1.01 \qquad x_3 = -.492 \tag{8.4}$$

مقارنة (8.3) و (8.4) مع الحل المضبوط

$$x_1 = \tfrac{1}{4} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -\tfrac{1}{2}$$

توضح أن استخدام الحذف المحورى يؤدى إلى نتائج أكثر دقة .

بالرغم من حقيقة أن التركيز المحورى يمكن أن يختزل التأثير المتراكم لخطأ التقريب الرقمى ، فتوجد أنظمة معينة للمعادلات ، تسمى أنظمة معتلة الشرط والتى تكون شديدة الحساسية لدرجة أن حتى الأخطاء الطفيفة فى المعاملات يمكن أن تنتج عدم دقة خطير فى الحل . على سبيل المثال ، اعتبر النظام

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad x_2 &= -3 \\ x_1 + 1.016x_2 &= \quad 5 \end{aligned} \tag{8.5}$$

إذا افترضنا أن هذا النظام سيحل على حاسب يقرب إلى ثلاثة أرقام معنوية ، فالحاسب سيخزن هذا النظام هكذا

$$\begin{aligned} x_1 \qquad x_2 &= -3 \\ x_1 + 1.02x_2 &= \quad 5 \end{aligned} \tag{8.6}$$

الحل المضبوط للمعاملات (8.5) هو $x_1 = -503$ ، $x_2 = 500$ والحل المضبوط للمعادلات (8.6) هو $x_1 = -403$ ، $x_2 = 400$ أى أن خطأ التقريب الرقى البسيط .004 فى أحد معاملات (8.5) يسبب خطأ جسيما فى الحل .

لا يمكن عمل سوى القليل من الناحية الحسابية لتجنب الأخطاء الضخمة فى حلول أنظمة المعادلات الخطية معتلة الشرط . رغم ذلك ، فى مسائل الطبيعة ، حيث تظهر أنظمة معتلة الشرط يكون من الممكن أحيانا أن نعيد صياغة المسألة التى تظهر النظام لتجنب اعتلال الشرط . بعض المراجع المشار إليها فى نهاية هذا الباب تشرح كيف نتعرف على الأنظمة المعتلة الشرط .

تمارين ٨ — ١

١ — عبر عن التالى بصورة النقط العائمة العيارية .

(أ) 14/5 (ب) 3,452 (ج) .000003879

(د) - .135 (هـ) 17.921 (و) - .0863

٢ – قرب الأعداد فى تمرين ١ إلى ثلاثة أرقام معنوية .

٣ – قرب الأعداد فى تمرين ١ إلى رقمين معنويين .

فى التمارين ٤ – ٧ استخدم طريقة جاوس للحذف المحورى لحل النظام بالضبط
تأكد من حلك باستخدام طريقة جاوس للحذف غير المحورى لحل النظام

٤ –
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -2 \\ -5x_1 + x_2 &= 22 \end{aligned}$$

٥ –
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 12 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

٦ –
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

٧ –
$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

فى التمرينين ٨ – ٩ حل النظام بطريقة جاوس للحذف المحورى . قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية .

٨ –
$$\begin{aligned} .21x_1 + .33x_2 &= .54 \\ .70x_1 + .24x_2 &= .94 \end{aligned}$$

٩ –
$$\begin{aligned} .11x_1 - .13x_2 + .20x_3 &= -.02 \\ .10x_1 + .36x_2 + .45x_3 &= .25 \\ .50x_1 - .01x_2 + .30x_3 &= -.70 \end{aligned}$$

١٠ – حل

$$\begin{aligned} .0001x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

بطريقتى جاوس للحذف المحورى والحذف غير المحورى . قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية
قارن النتائج بالحل المضبوط .

٨ – ٢ طريقة جاوس – سيدل و جاكوبى

طريقة جاوس للحذف عادة هى أفضل وسيلة لحل نظام من المعادلات الخطية ولكن عندما يكون عدد المعادلات كبيرا ، مائة مثلا أو أكثر ، وعندما تكون بالمصفوفة أصفار كثيرة فقد تكون بعض الطرق الأخرى أكثر فائدة ؛ سندرس فى هذا القسم طريقتين من هذه الطرق .

اعتبر نظام من n معادلة خطية فى n مجهولا

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{8.7}$$

سنفرض أن العناصر القطرية a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{nn} جميعها غير صفرية وأن للنظام حلا واحد .

الطريقة الأولى التي سنناقشها تسمى **بتكرار جاكوبي أو بطريقة الإزاحات في آن واحد** . لكي تبدأ ، أعد كتابة النظام (8.7) بحل المعادلة الأولى بالنسبة إلى x_1 بدلالة بقية المجاهيل، وحل لمعادلة الثانية بالنسبة إلى x_2 بدلالة بقية المجاهيل ، وحل المعادلة الثالثة بالنسبة إلى x_3 بدلالة بقية المجاهيل وهلم جرا . هذا يعطى

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

فمثلا النظام

$$
\begin{aligned}
20x_1 + x_2 - x_3 &= 17\\
x_1 - 10x_2 + x_3 &= 13\\
-x_1 + x_2 + 10x_3 &= 18
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

يجب أن يعاد كتابته على الصورة

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{17}{20} - \tfrac{1}{20}x_2 + \tfrac{1}{20}x_3\\
x_2 &= -\tfrac{13}{10} + \tfrac{1}{10}x_1 + \tfrac{1}{10}x_3\\
x_3 &= \tfrac{18}{10} + \tfrac{1}{10}x_1 - \tfrac{1}{10}x_2
\end{aligned}
$$

أى

$$
\begin{aligned}
x_1 &= .850 - .05x_2 + .05x_3\\
x_2 &= -1.3 + .1x_1 + .1x_3\\
x_3 &= 1.8 + .1x_1 - .1x_2
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

إذا كان هناك تقريبا معروفا لحل النظام (8.7) ، وعوضنا بهذه القيم المقربة فى الطرف الأيمن من (8.8) فتكون عادة قيم x_1 ، x_2 ، ... ، x_n الناتجة فى الطرف الأيسر تقريبا أفضل للحل . هذه الملحوظة هى مفتاح طريقة جاكوبى .

لحل النظام (8.7) بتكرار جاكوبى أوجد تقريبا أوليا للحل . عندما لا يوجد اختيار جيد استخدم $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ . . . .

عوض بهذا التقريب الأولى فى الطرف الأيمن من (8.8) واستخدم قيم x_1 ، x_2 ، ... الناتجة فى الطرف الأيسر كتقريب جديد للحل .

فمثلا لحل (8.9) بطريقة جاكوبى ، علينا أن نعوض بالتقريب الأولى $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ فى الطرف الأيمن من (8.10) ثم نحسب التقريب الجديد

$$x_1 = .850 \qquad x_2 = -1.3 \qquad x_3 = 1.8 \tag{8.11}$$

لتحسين التقريب علينا أن نكرر عملية التعويض . فمثلا فى حل (8.9) علينا أن نعوض بالتقريب (8.11) فى الطرف الأيمن من (8.10) لحصول على التقريب التالى

$$x_1 = .850 - .05(-1.3) + .05(1.8) = 1.005$$
$$x_2 = -1.3 + .1(.850) + .1(1.8) = -1.035$$
$$x_3 = 1.8 + .1(.850) - .1(-1.3) = 2.0105$$

بهذه الطريقة يمكننا تكوين متتابعة من التقريبات التى تقترب ، تحت شروط معينة ، أكثر فأكثر إلى الحل المضبوط للنظام . فى شكل ٨ – ١ لخصنا النتائج التى حصلنا عليها بحل النظام (8.9)بتكرار جاكوبى . قربت جميع الحسابات إلى خمسة أرقام معنوية فى نهاية التعويض السادس (يسمى بالتكرار السادس) فإن الحل المضبوط $x_1 = 1$ ، $x_2 = -1$ ، $x_3 = 2$ يصبح معلوما بدقة إلى خمسة أرقام معنوية .

	التقريب الابتدائى	التقريب الأول	التقريب الثانى	التقريب الثالث	التقريب الرابع	التقريب الخامس	التقريب السادس
x_1	0	.850	1.005	1.0025	1.0001	.99997	1.0000
x_2	0	−1.3	−1.035	−.9980	−.99935	−.99999	−1.0000
x_3	0	1.8	2.015	2.004	2.0000	1.9999	2.0000

(شكل ٨ – ١)

سنناقش الآن تعديلا طفيفاً لطريقة جاكوبى تختزل عادة عدد التكرارات المطلوبة لحصول على درجة دقة معطاة . تسمى هذه الطريقة بتكرار جاوس – سيدل أو بطريقة الإزاحات المتتالية .

فى كل تكرار بطريقة جاكوبى نحصل على التقريب الجديد بالتعويض بالتقريب السابق فى الطرف الأيمن من (8.8) ثم الحل لحصول على قيم جديدة للمجاهيل x_1 ، x_2 ، ... هذه القيم الجديدة لا تحسب فى آن واحد ، نحصل على x_1 أولا من المعادلة الأولى ، ثم نحصل على x_2 من المعادلة الثانية ، ثم على x_3 وهلم جرا . حيث أن قيم x الجديدة عادة تكون أقرب إلى الحل المضبوط ، فإن هذا يقترح أننا نحصل على دقة أكثر باستعمال قيم x الجديدة بمجرد معرفتها . للتوضيح اعتبر النظام (8.9). فى التكرار الأول لطريقة جاكوبى ، عوضنا بالتقريب الأول $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ فى كل معادلة من الطرف الأيمن فى (8.10) لحصول على التقريب الجديد

$$x_1 = .850 \qquad x_2 = -1.3 \qquad x_3 = 1.8 \tag{8.12}$$

فى التكرار الأول فى طريقة جاوس – سيدل فإن التقريب الجديد يجب أن يحسب كما يلى . عوض بالتقريب الأولى $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ فى الطرف الأيمن من لمعادلة الأولى فى (8.10) يعطى هـذا القيمة التقديرية الجديدة $x_1 = .850$.

استخدم هذه القيمة الجديدة للمجهول x_1 مباشرة فى التعويض

$$x_1 = .850 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

فى الطرف الأيمن من المعادلة الثانية فى (8.10) . يعطى هذا القيمة التقديرية الجديدة $x_2 = -1.215$.
استخدم هذه القيمة الجديدة للمجهول x_2 مباشرة فى التعويض

$$x_1 = .850 \qquad x_2 = -1.215 \qquad x_3 = 0$$

فى الطرف الأيمن من المعادلة الثالثة فى (8.10) يعطى هذا القيمة التقديرية الجديدة $x_3 = 2.0065$. وعليه فنى نهاية التكرار الأول بطريقة جاوس – سيدل فإن التقريب الجديد هو

$$x_1 = .850 \qquad x_2 = -1.215 \qquad x_3 = 2.0065 \qquad (8.13)$$

ويجب أن تجرى الحسابات للتكرار الثانى كما يلى .

التعويض من (8.13) فى الطرف الأيمن من المعادلة الأولى من (8.10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_1 = .850 - .05(-1.215) + .05(2.0065) = 1.0111$$

التعويض

$$x_1 = 1.0111 \qquad x_2 = -1.215 \qquad x_3 = 2.0065$$

فى الطرف الأيمن من المعادلة الثانية من (8.10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_2 = -1.3 + .1(1.0111) + .1(2.0065) = -.99824$$

التعويض

$$x_1 = 1.0111 \qquad x_2 = -.99824 \qquad x_3 = 2.0065$$

فى الطرف الأيمن من المعادلة الثالثة من (8·10) والتقريب إلى خمسة أرقام معنوية يعطى

$$x_3 = 1.8 + .1(1.0111) - .1(-.99824) = 2.0009$$

عليه فنى نهاية التكرار الثانى بطريقة جاوس – سيدل يكون التقريب الجديد هو

$$x_1 = 1.0111 \qquad x_2 = -.99824 \qquad x_3 = 2.0009$$

فى شكل ٨ — ٢ لخصنا النتائج التى حصلنا عليها باستخدام أربعة تكرارات بطريقة جاوس سيدل لحل (8.9) وقد قربت جميع الأعداد إلى خمسة أرقام معنوية .

بمقارنة الجدولين فى شكل ٨ — ١ ، ٨ — ٢ نجد أن طريقة جاوس — سيدل تعطى الحل للنظام (8.9) (بدقة إلى خمسة أرقام معنوية) فى أربعة تكرارات بينما نحتاج إلى ستة تكرارات لحصول على نفس الدقة بطريقة جاكوبى .

(شكل ٨ — ٢)

	التقريب الابتدائى	التقريب الأول	التقريب الثانى	التقريب الثالث	التقريب الربع
x_1	0	.850	1.0111	.99995	1.0000
x_2	0	−1.215	−.99824	−.99992	−1.0000
x_3	0	2.0065	2.0009	2.0000	2.0000

ويجب ألا نستخلص من هذا المثال أن طريقة جاوس — سيدل دائما أفضل من طريقة جاكوبى . بالرغم من أنه قد يبدو الأمر غريبا إلا أنه توجد فعلا أمثلة بحيث تكون طريقة جاكوبى أفضل من طريقة جاوس — سيدل .

طريقتا جاوس — سيدل وجاكوبى لا تصلحان دائما . فى بعض الحالات قد تفشل إحداهما أو كلاهما فى إعطاء تقريب جيد لحل بغض النظر عن عدد التكرارات المنجزة . فى مثل هذه الحالات تسمى التقريبات تباعديه . إذا كان إنجاز عدد كبير كبرا كافيا من التكرارات ، يمكن الحصول على الحل إلى أى درجة نريدها من الدقة فتسمى التقريبات تقاربية .

نختم هذ القسم بمناقشة شرط يضمن أن التقريبات الناتجة من الطريقتين تقاربية .

المصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى سائدة قطرياً بانتظام إذا كانت القيمة المطلقة لكل عنصر قطرى أكبر من مجموع القيم المطلقة للعناصر الباقية فى نفس الصف ؛

أى أن

$$\begin{aligned}|a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|\\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|\\ &\vdots\\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}|\end{aligned}$$

مثال (٤) :

$$\begin{bmatrix}7 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -6\\ 5 & 12 & -4\end{bmatrix}$$

غير سائد قطريا ، حيث أنه فى الصف الثانى $|1|$ ليس بأكبر من $|-6| + |4|$ ، وفى الصف الثالث $|-4|$ ليس بأكبر من $|12| + |5|$.

إذا بدلنا الصفين الثانى والثالث ، فإن المصفوفة الناتجة

$$\begin{bmatrix}7 & -2 & 3\\ 5 & 12 & -4\\ 4 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

تكون سائدة قطريا بانتظام إذ أن

$$\begin{aligned}|7| &> |-2| + |3|\\ |12| &> |5| + |-4|\\ |-6| &> |4| + |1|\end{aligned}$$

يمكن إثبات أنه إذا كانت المصفوفة A سائدة قطريا بانتظام فإن تقريبات جاوس - سيدل وجاكوبى لحل $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ تكون تقاربية .

تمارين ٨ — ٢

فى التمارين ١ - ٤ حل الأنظمة بتكرار جاكوبى . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$. استخدم أربعة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

١ - $\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 7\\ x_1 - 2x_2 &= 1\end{aligned}$

٢ - $\begin{aligned}3x_1 - x_2 &= 5\\ 2x_1 + 3x_2 &= -4\end{aligned}$

٣ - $\begin{aligned}5x_1 - 2x_2 &= -13\\ x_1 + 7x_2 &= -10\end{aligned}$

٤ - $\begin{aligned}.4x_1 + .1x_2 &= .2\\ .3x_1 + .7x_2 &= 1.4\end{aligned}$

فى التمارين ٥ - ٨ حل الأنظمة بتكرار جاوس - سيدل . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$. استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

٥ – حل النظام فى تمرين ١ .

٦ – حل النظام فى تمرين ٢ .

٧ – حل النظام فى تمرين ٣ .

٨ – حل النظام فى تمرين ٤ .

فى التمارين ٩ – ١٠ حل النظام بتكرار جاكوبى . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية . قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

٩ –
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 &= \tfrac{3}{2} \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= -9 \end{aligned}$$

١٠ –
$$\begin{aligned} 20x_1 - x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 &= 11 \\ x_1 + x_2 - 20x_3 &= -18 \end{aligned}$$

فى التمرينين ١١ – ١٢ حل النظام بتكرار جاوس – سيدل . ابدأ بالتقريب $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ استخدم ثلاثة تكرارات وقرب الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية. قارن نتائجك بالحلول المضبوطة .

١١ – حل النظام فى تمرين ٩ .

١٢ – حل النظام فى تمرين ١٠ .

١٣ – أى من المصفوفات التالية تكون سائدة قطريا بانتظام ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

١٤ – اعتبر النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(أ) اثبت أن التقريبات التى نحصل عليها بتكرارات جاكوبى تباعدية .

(ب) هل مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

سائدة قطريا بانتظام ؟

١٥ – اثبت أنه إذا كان واحد أو أكثر من العناصر القطرية a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{nn} فى (8.7) صفرا فمن الممكن أن نبدل المعادلات ونعيد ترقيم المجاهيل بحيث تكون العناصر القطرية فى النظام الناتج جميعها غير صفرية .

٨ – ٣ تقريب القيم الذاتية بطريقة القوى

يمكن إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة بحل معادلتها المميزة . وتكون هذه الطريقة فى المسائل العملية غير مجدية . وعلاوة على هذا فى كثير من المسائل الطبيعية يكون المطلوب هو القيمة الذاتية ذات أكبر قيمة مطلقة فقط . فى هذا القسم نناقش طريقة لتقريب هذه القيمة الذاتية ومتجه ذاتى مناظر لها . وسنناقش فى القسم التالى التقريب لبقية القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

تعريف : تسمى قيمة ذاتية لمصفوفة A **بالقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة** A إذا كانت قيمتها المطلقة أكبر من القيمة المطلقة لكل من القيم الذاتية الباقية . أى متجه ذاتى مناظر للقيمة الذاتية السائدة يسمى **بمتجه ذاتى سائد للمصفوفة** A .

مثال (٥) :

إذا كان للمصفوفة A من النوع 4×4 القيم الذاتية

$$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -2 \qquad \lambda_4 = 2$$

فإن $\lambda_1 = -4$ هى القيمة الذاتية السائدة إذ أن

$$|-4| > |-2| \qquad |-4| > |3| \qquad \text{و} \qquad |-4| > |2|$$

مثال (٦) :

ليس لمصفوفة A من النوع 3×3 وقيمها الذاتية

$$\lambda_1 = 7 \qquad \lambda_2 = -7 \qquad \lambda_3 = 2$$

قيمة ذاتية سائدة .

اعتبر أن A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية ولها قيمة ذاتية سائدة سنثبت فى نهاية هذا القسم أنه إذا كان $\mathbf{x}_0$ متجها اختياريا غير صفرى فى R^n ، فإن المتجه

$$A^p \mathbf{x}_0 \qquad (8.14)$$

يكون عادة تقريبا جيدا لمتجه ذاتى سائد للمصفوفة A عندما يكون الأس p كبيرا ويوضح المثال التالى هذه الفكرة .

مثال (٧) :

كما بينا فى مثال ٢ بالباب السادس فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

لها القيمتان الذاتيتان $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = 1$.

الفضاء الذاتى المناظر للقيمة الذاتية السائدة $\lambda_1 = 2$ هو فضاء الحل للنظام

$$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

أى

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى $x_1 = -2t$ ، $x_2 = t$ لهذا فإن المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda_1 = 2$ هى المتجهات غير الصفرية التى على الصورة

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

سنوضح الآن طريقة لاستخدام (8.14) فى تقدير متجه ذاتى سائد للمصفوفة A لكى نبدأ نأخذ اختياريا

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تكرار ضرب $\mathbf{x}_0$ بالمصفوفة A يعطى

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2\mathbf{x}_0 = A(A\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3\mathbf{x}_0 = A(A^2\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} \approx 13 \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4\mathbf{x}_0 = A(A^3\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} \approx 29 \begin{bmatrix} 2.10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^5\mathbf{x}_0 = A(A^4\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 61 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} \approx 61\begin{bmatrix} 2.05 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^6\mathbf{x}_0 = A(A^5\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 125 \\ -61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} \approx 125\begin{bmatrix} 2.02 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^7\mathbf{x}_0 = A(A^6\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 253 \\ -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} \approx 253\begin{bmatrix} 2.01 \\ -1 \end{bmatrix}$$

واضح من هذه الحسابات أن نواتج الضرب تقترب أكثر فأكثر من مضاعفات قياسية للمتجه

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وهو المتجه الذاتى السائد للمصفوفة A الذى نحصل عليه بوضع $t = -1$ فى (8.15). حيث أن المضاعف القياسى لمتجه ذاتى سائد هو أيضاً متجه ذاتى سائد فإن الحسابات السابقة تنتج تقريبات أفضل فأفضل لمتجه ذاتى سائد للمصفوفة A .

سنوضح الآن كيف نقرب القيمة الذاتية السائدة متى عرفنا تقريبا لمتجه ذاتى سائد . لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A و $\mathbf{x}$ متجها ذاتيا مناظرا . إذا كان $\langle \ , \ \rangle$ يرمز إلى الضرب الداخلى الأقليدى ، فإن

$$\frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \lambda$$

وعليه إذا كان $\tilde{\mathbf{x}}$ تقريبا لمتجه ذاتى سائد فيمكن تقريب القيمة الذاتية السائدة λ_1 بواسطة

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, A\tilde{\mathbf{x}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle} \qquad (8.16)$$

تسمى النسبة فى (8.16) بخارج قسمة رايلى.*

مثـال (٨) :

حصلنا فى مثال ٧ على

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix}$$

(*) جون ويليام ستروت رايلى (١٨٤٢ — ١٩١٩) — فيزيائى بريطـانى . منح رايلى جـائزة نوبل فى الفيزياء عام ١٩٠٤ لدوره فى اكتشاف غاز الارجون عام ١٨٩٤ . غطت أبحاثه تقريبا جميع افرع الفيزياء بما فى ذلك الصوت ، نظرية الموجات ، الضوء ، الرؤيا الملونة ، الاليكتروديناميكا ، الاليكترومغناطيسية ، تشتت الضوء ، اللزوجة ، التصوير .

كتقريب لمتجه ذاتي سائد . وإذن

$$A\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 509 \\ -253 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1021 \\ -509 \end{bmatrix}$$

بالتعويض فى (8.16) نحصل على

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \tilde{\mathbf{x}}, A\tilde{\mathbf{x}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle} = \frac{(509)(1021) + (-253)(-509)}{(509)(509) + (-253)(-253)} \approx 2.007$$

وهو تقريب جيد ، نسبياً ، للقيمة الذاتية السائدة $\lambda_1 = 2$.

الطريقة الموضحة فى مثال (٧)،(٨) لتقريب المتجهات الذاتية والقيم الذاتية السائدة تسمى عادة **بطريقة القوى أو بطريقة التكرار** .

كما هو واضح من مثال (٧) . فإن طريقة القوى تنشىء عادة متجهات ذات مركبات كبيرة إلى درجة غير مناسبة لتلافى هذه المشكلة فإننا عادة « نعدل » المتجه الذاتى المقرب فى كل خطوة بحيث تقع مركباته بين 1 + و 1 — ويمكننا عمل هذا بضرب المتجه الذاتى المقرب فى مقلوب المركبة التى لها أكبر قيمة مطلقة .

للتوضيح ، فى الخطوة الأولى فى مثال ٧ ، كان التقريب للمتجه الذاتى السائد هو

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المركبة التى لها أكبر قيمة مطلقة هى 5 لهذا فإن المتجه الذاتى المعدل بتصغير مركباته هو

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

سنلخص الآن خطوات **طريقة القوى مع التصغير** .

الخطوة صفر . خذ متجهاً اختيارياً غير صفرى $\mathbf{x}_0$.

الخطوة ١ – احسب $A\mathbf{x}_0$ وصغر مركباته للحصول على التقريب الأول لمتجه ذاتى سائد سمه $\mathbf{x}_1$.

الخطوة ٢ – احسب $A\mathbf{x}_1$ وصغر مركباته للحصول على التقريب الثانى $\mathbf{x}_2$.

الخطوة ٣ – احسب $A\mathbf{x}_2$ وصغر مركباته للحصول على التقريب الثالث $\mathbf{x}_3$.

بالاستمرار على هذا المنوال نحصل على متتابعة $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots,$ من التقريبات الأفضل فالأفضل لمتجه ذاتى سائد .

مثال (٩) :

استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتى سائد والقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A فى مثال (٧) .

الحل : نأخذ اختياريا

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كتقريب ابتدائى . ضرب $\mathbf{x}_0$ بالمصفوفة A ثم تصغير مركبتيه يعطى

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix}$$

ضرب $\mathbf{x}_1$ بالمصفوفة A ثم تصغير مركبتيه يعطى

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{2.6}\begin{bmatrix} 2.6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix}$$

من نسبة رايلى يكون التقدير الأول للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} = \frac{(1)(2.6) + (-.2)(-1)}{(1)(1) + (-.2)(-.2)} = 2.692$$

ضرب $\mathbf{x}_2$ بالمصفوفة A ثم تصغير مركبتيه يعطى

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -.385 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2.23}\begin{bmatrix} 2.23 \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix}$$

من نسبة رايلى يكون التقدير الثانى للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_2, A\mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} = \frac{(1)(2.23) + (-.385)(-1)}{(1)(1) + (-.385)(-.385)} = 2.278$$

ضرب $\mathbf{x}_3$ بالمصفوفة A ثم تصغير مركبتيه يعطى

$$A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -.448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \frac{1}{2.104}\begin{bmatrix} 2.104 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -.475 \end{bmatrix}$$

التقدير الثالث للقيمة الذاتية السائدة هو

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle \mathbf{x}_3, A\mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 \rangle} = \frac{(1)(2.104) + (-.448)(-1)}{(1)(1) + (-.448)(-.448)} = 2.125$$

بالاستمرار على هذا المنوال ، ننشىء متتابعة تقريبيات لمتجه ذاتى سائد وللقيمة الذاتية السائدة .

القيم التى حسبت أعلاه ونتائج التقديرات التالية لها قد وضعت فى جدول فى شكل ٨ – ٣ .

(خطوه ٨ – ٣)

خطوة رقم ٢	0	1	2	3	4	5	6	7
التقريب لمتجه ذاتي سائد صغرت مركبتاه $= \mathbf{x}_i$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.385\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.448\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.475\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.488\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.494\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-.497\end{bmatrix}$
$A\mathbf{x}_i$	$\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.6\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.23\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.104\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.050\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.024\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.012\\-1\end{bmatrix}$	—
تقريب λ_1	—	2.692	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014	—

لا توجد قواعد محكمة وسريعة لتحديد عدد الخطوات التى تستخدم فى طريقة القوى ، وسنذكر طريقة واحدة ممكنة وشائعة الاستعمال .

إذا كانت $\tilde{q}$ ترمز لتقريب للكمية q ، فإن الخطأ النسبى فى التقريب يعرف بأنه

$$\left|\frac{q - \tilde{q}}{q}\right| \tag{8.17}$$

والخطأ المئوى فى التقريب يعرف بأنه

$$\left|\frac{q - \tilde{q}}{q}\right| \times 100\%$$

مثـال (١٠) :

إذا كانت القيمة المضبوطة لقيمة ذاتية معينة هى $\lambda = 5$ وكانت $\tilde{\lambda} = 5.1$ هى تقريب للقيمة λ فإن الخطأ النسبى هو

$$\left|\frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\lambda}\right| = \left|\frac{5 - 5.1}{5}\right| = |-.02| = .02$$

والخطأ المئوى هو

$$(.02) \times 100\% = 2\%$$

فى طريقة القوى قد نرى أن نحدد مقدما الخطأ النسبى E الذى يمكننا التغاضى عنه فى القيمة الذاتية ثم نوقف عمليات الحساب متى أصبح الخطأ النسبى أقل من E. فإذا كانت $\tilde{\lambda}(i)$ ترمز إلى التقريب للقيمة الذاتية السائدة λ_1 فى الخطوة i فإن عمليات الحساب توقف متى تحقق الشرط .

$$\left|\frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}(i)}{\lambda_1}\right| < E$$

ولسوء الحظ ليس ممكنا أن ننفذ هذه الفكرة حيث إن القيمة الذاتية المضبوطة λ_1 غير معلومة للتغلب على ذلك عادة تقدر λ_1 بالقيمة $\tilde{\lambda}(i)$ ونوقف عمليات الحساب فى الخطوة i إذا كان

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(i) - \tilde{\lambda}(i-1)}{\tilde{\lambda}(i)}\right| < E \tag{8.18}$$

تسمى الكمية الموجودة فى الطرف الأيسر من (8.18) **بتقدير الخطأ النسبى** عند ضربها فى 100% تسمى **بتقدير الخطأ المئوى** .

مثال (١١) :

فى مثال ٩ ما هو عدد الخطوات التى يجب أن تستخدم لضمان أن الخطأ المئوى فى القيمة الذاتية السائدة يكون أقل من 2% ؟

الحل : اعتبر أن $\tilde{\lambda}(i)$ ترمز إلى تقريب القيمة الذاتية السائدة فى الخطوة i من شكل ٨ — ٣

$$\tilde{\lambda}(1) = 2.692, \qquad \tilde{\lambda}(2) = 2.278, \qquad \tilde{\lambda}(3) = 2.125,$$

وهلم جرا .

من (8.18) يكون تقدير الخطأ النسبى بعد خطوتين هو

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(2) - \tilde{\lambda}(1)}{\tilde{\lambda}(2)}\right| = \left|\frac{2.278 - 2.692}{2.278}\right| \approx |-.182| = .182$$

ويكون تقدير الخطأ المئوى بعد خطوتين هو 18.2%

تقدير الخطأ النسبى بعد ثلاث خطوات هو

$$\left|\frac{\tilde{\lambda}(3) - \tilde{\lambda}(2)}{\tilde{\lambda}(3)}\right| = \left|\frac{2.125 - 2.278}{2.125}\right| \approx |-.072| = .072$$

وتقدير الخطأ المئوى هو 7.2% وقد وضعت بقية الأخطاء المئوية فى جدول فى شكل ٨ — ٤ . من هذا الجدول نرى أن تقدير الخطأ المئوى أقل من 2% فى نهاية الخطوة الخامسة .

رقم الخطوة = i	2	3	4	5	6
$\tilde{\lambda}(i)$	2.278	2.125	2.060	2.029	2.014
الخطأ النسبى المقدر بعد i خطوة	.182	.072	.032	.015	.007
الخطأ المئوى المقدر بعد i خطوة	18.2%	7.2%	3.2%	1.5%	.7%

(شكل ٨ – ٤)

مادة اختيارية :

نختتم هذا القسم بإثبات أن طريقة القوى تصلح عندما تكون المصفوفة A قابلة للتحول إلى الصورة القطرية ولها قيمة ذاتية سائدة .

افرض أن A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية من نظرية ٢ بقسم ٦ – ٢ يكون للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية المستقلة خطيا $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$. افرض أن λ_1 ، λ_2 ، . . . ، λ_n هى القيم الذاتية المناظرة وافرض أن

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \tag{8.19}$$

من نظرية ٩ (أ) بقسم ٤ – ٥ تكون المتجهات الذاتية $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، . . . ، $\mathbf{v}_n$ أساساً لفضاء R^n وإذن أى متجه اختيارى $\mathbf{x}_0$ فى R^n يمكن التعبير عنه بالصورة

$$\mathbf{x}_0 = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{8.20}$$

ضرب الطرفين من اليسار بالمصفوفة A يعطى

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_0 &= A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n) \\ &= k_1(A\mathbf{v}_1) + k_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + k_n(A\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

الضرب بالمصفوفة A مرة أخرى يعطى

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x}_0 &= A(k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1(A\mathbf{v}_1) + k_2\lambda_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + k_n\lambda_n(A\mathbf{v}_n) \\ &= k_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2^2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

بالاستمرار نحصل بعد الضرب بالمصفوفة A عدد p من المرات ، على

$$A^p\mathbf{x}_0 = k_1\lambda_1^p\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2^p\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\lambda_n^p\mathbf{v}_n \tag{8.21}$$

حيث إن $\lambda_1 \neq 0$ (انظر (8.19)) فإن (8.21) يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$A^p\mathbf{x}_0 = \lambda_1{}^p\left(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p\mathbf{v}_n\right) \tag{8.22}$$

من (8.19) ينتج أن

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

جميعها أقل من الواحد فى القيمة المطلقة . إذن $(\lambda_2/\lambda_1)^p, \ldots, (\lambda_n/\lambda_1)^p$ تقترب باستمرار من الصفر بزيادة p ، ومن (8.22) يصبح التقريب

$$A^p\mathbf{x}_0 \approx \lambda_1{}^p k_1\mathbf{v}_1 \tag{8.23}$$

أفضل فأفضل

إذا كانت* $k_1 \neq 0$ فإن $\lambda_1^p k_1\mathbf{v}_1$ يكون مضاعفا قياسيا غير صفرى للمتجه الذاتى السائد $\mathbf{v}_1$ وعليه فإن $\lambda_1^p k_1\mathbf{v}_1$ هو أيضاً متجه ذاتى سائد . إذن من (8.23) يصبح $A^p\mathbf{x}_0$ تقديراً أفضل فأفضل لمتجه ذاتى سائد كلما زادت p .

تمارين ٨ — ٣

١ — أوجد القيمة الذاتية السائدة (إن وجدت) .

(أ) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(*) عادة لا يمكن للمرء بمعاينة $\mathbf{x}_0$ التى اختيرت أن يؤكد ما إذا كانت $k_1 \neq 0$. إذا حدث بالصدفة أن كانت $k_1 = 0$ فإن طريقة القوى تظل صالحة فى المسائل العملية حيث إن خطأ الحاسب العددى بتقريب الأرقام يبنى بحيث يجعل k_1 صغيرة وليست صفرا . وهذه حالة تساعد فيها الأخطاء على الحصول على نتائج صحيحة .

٢ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتى سائد للمصفوفة A. ابدأ بالمتجه

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات (أى ثلاث عمليات ضرب بالمصفوفة A) .

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايلى ، لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A

(ج) أوجد القيم المضبوطة للمتجه الذاتى السائد والقيمة الذاتية السائدة .

(د) أوجد الخطأ المئوى فى تقريب القيمة الذاتية السائدة .

فى التمرينين ٣ – ٤ أوجد المطلوب فى تمرين (٢)

٣ – $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

٤ – $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

٥ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب القيمة الذاتية السائدة ومتجه ذاتى سائد للمصفوفة A ابدأ بالمتجه

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف عندما يقل الخطأ المئوى فى القيمة الذاتية السائدة عن 2% .

(ب) أوجد القيم المضبوطة للقيمة الذاتية السائدة وللمتجه الذاتى السائد .

٦ – كرر المطلوب فى تمرين (٥) مع المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

٧ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتى سائد للمصفوفة A ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات .

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايلى لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A .

(جـ) أوجد القيم المضبوطة للقيمة الذاتية السائدة والمتجه الذاتى السائد .

(د) أوجد الخطأ المئوى فى تقريب القيمة الذاتية السائدة .

٨ – ٤ تقريب القيم الذاتية غير السائدة بطريقة تحلل المصفوفة

سنذكر فى هذا القسم باختصار طريقة لحصول على المتجهات الذاتية والقيم الذاتية غير السائدة لمصفوفة متماثلة .

سنحتاج إلى النظرية التالية التى نذكرها بدون إثبات* .

نظرية ١ : اعتبر A مصفوفة متماثلة من النوع $n \times n$ ولها القيم الذاتية λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n.
إذا كان $\mathbf{v}_1$ متجهاً ذاتياً مناظراً للقيمة λ_1 وكان $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ فإن :

(أ) المصفوفة $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1'$ لها القيم الذاتية 0 ، λ_2 ، ... ، λ_n.

(ب) إذا كان $\mathbf{v}$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة B مناظراً لإحدى القيم الذاتية λ_2 ، ... ، λ_n فيكون $\mathbf{v}$ أيضاً متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مناظراً لهذه القيمة الذاتية .

(نحن نفترض فى نظرية (١) أن $\mathbf{v}_1$ معبراً عنه كمصفوفة من النوع $n \times 1$ وعليه فإن $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1'$ مصفوفة من النوع $n \times n$)

مثـــال (١٢) :

أثبتنا فى مثال (٥) بقسم ٦ – ١ أن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

---

* القراء الذين يهتمون بإثبات هذه النظرية عليهم الرجوع إلى المراجع المعطاة فى نهاية هذا القسم .

لها القيم الذاتية $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1$ وأن

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هو متجه ذاتى مناظر للقيمة $\lambda_1 = 5$. بوضع $\mathbf{v}$ فى الصورة العيارية نحصل على

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهو متجه ذاتى ، معياره 1 يناظر $\lambda_1 = 5$.

من نظرية (١) يجب أن يكون المصفوفة

$$B = A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية $\lambda = 0, 5, 1$. لنتأكد فإن المعادلة المميزة للمصفوفة B هى

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$$

ومن ثم فإن القيم الذاتية للمصفوفة B هى $\lambda = 0, \lambda = 5, \lambda = 1$ كما تنبئنا نظرية (١)

فضاء B الذاتى المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هو فضاء الحل للنظام

$$(5I - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

أى

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام يعطى $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t$ إذ المتجهات الذاتية للمصفوفة B المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هى المتجهات غير الصفرية التى على الصورة .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

كما ينبئنا الجزء (ب) من نظرية (١) هذه هى أيضاً المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ لأن

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5t \end{bmatrix}$$

أى أن

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

بالمثل متجهات B الذاتية التى تناظر $\lambda = 1$ هى أيضاً متجهات ذاتية للمصفوفة A تناظر $\lambda = 1$.

تجعل نظرية (١) ، إلى درجة محدودة ، من الممكن تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية غير السائدة لمصفوفة متماثلة من النوع $n \times n$. لتوضيح ذلك ، افرض أن المتجهات الذاتية للمصفوفة A يمكن ترتيبها تبعاً لقدر القيم المطلقة كما يلى

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \tag{8.24}$$

افترض أن متجه ذاتى سائد والقيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A قد حصلنا عليهما بطريقة القوى. بجعل المتجه الذاتى السائد له المعيار ١ نحصل على متجه ذاتى سائد $\mathbf{v}_1$ له المعيار 1 . من نظرية ١ تكون القيم الذاتية للمصفوفة $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^t$ هى 0 ، λ_2 ، λ_3 ، . . . ، λ_n. من (8.24) ستترتب هذه القيم الذاتية تبعاً لقيمها المطلقة كما يلى :

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

وعليه فإن λ_2 هي القيمة السائدة للمصفوفة B. بتطبيق طريقة القوى الآن على B يمكننا تقريب القيمة الذاتية λ_2 ومتجه ذاتى مناظر . تسمى هذه الطريقة لتقريب القيمة الذاتية التى لها القيمة المطلقة الثانية فى الكبر بطريقة التحلل .

للأسف توجد قيود عملية لطريقة التحلل حيث أن λ_1 ، $\mathbf{v}_1$ قد قربا فقط بطريقة القوى فينشأ خطأ فى المصفوفة B عند استخدام طريقة التحلل . إذا طبقت طريقة التحلل مرة أخرى فإن المصفوفة التالية يكون بها خطأ إضافى ناتج عن تقريب λ_2 ، $\mathbf{v}_2$. كلما استمرت العملية فإن هذه الأخطاء المركبة تحطم دقة النتائج . وعملياً يجب على المرء بوجه عام أن يتجنب إيجاد أكثر من قيمتين أو ثلاث قيم ذاتية بطريقة التحلل .

عندما تكون النسبة $|\lambda_2/\lambda_1|$ قريبة من الواحد فإن طريقة القوى يكون لها معدل تقارب بطىء ، أى أننا نحتاج إلى خطوات كثيرة للحصول على درجة معقولة من الدقة . القراء المهتمون بدراسة طرق « زيادة سرعة » معدل التقارب هذا ، وبتعلم المزيد عن الطرق العددية للجبر الخطى يمكنهم الرجوع إلى المراجع التالية :

Analysis of Numerical Methods, E. Isaacson and H. B. Keller, John Wiley and Sons, New York, 1966.
Applied Linear Algebra, B. Noble, Prentice Hall, Inc., 1969.
Computational Methods of Linear Algebra, V. N. Faddeeva, Dover, 1959.

تظهر مراجع أخرى فى مراجع هذين الكتابين

تمارين ٨ — ٤

١ – اعتبر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) استخدم طريقة القوى مع التصغير لتقريب متجه ذاتى سائد . ابدأ بالمتجه

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات (اى بعد ثلاث مرات ضرب بالمصفوفة A) .

(ب) استخدم نتيجة الجزء (أ) وخارج قسمة رايلى لتقريب القيمة الذاتية السائدة للمصفوفة A.

(جـ) استخدم طريقة التحلل لتقريب القيمة الذاتية الباقية ومتجه ذاتى مناظر ، أى طبق طريقة القوى على المصفوفة

$$B = A - \tilde{\lambda}_1 \tilde{v}_1 \tilde{v}_1^t$$

حيث $\tilde{v}_1$ و $\tilde{\lambda}_1$ هما التقريبيان اللذان حصلت عليهما فى الجزءين (أ) ، (ب) ابدأ بالمتجه

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قرب جميع الحسابات إلى ثلاثة أرقام معنوية وتوقف بعد ثلاثة تكرارات .

(د) أوجد القيم المضبوطة للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

٢ – أوجد المطلوب فى تمرين ١ بالنسبة إلى المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

اجوبة التمارين

تمارين ١ ــ ١ (صفحة ٧)

١ - ب ، د ، و

٢ - (أ) $x = \frac{7}{6}t + \frac{1}{2}, y = t$

(ب) $x_1 = -2s + \frac{7}{2}t + 4, x_2 = s, x_3 = t$

(جـ) $x_1 = \frac{4}{3}r - \frac{7}{3}s + \frac{8}{3}t - \frac{5}{3}, x_2 = r, x_3 = s, x_4 = t$

(د) $v = \frac{1}{2}q - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}s + 2t, w = q, x = r, y = s, z = t$

٣ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

٤ - (أ)
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ - x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(جـ)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 \quad &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned}$$

٥ - $k = 6$ عدد لانهائى من الحلول

$k \neq 6$ لاتوجد حلول

٦ - (أ) لاتوجد للمستقيمات نقطة تقاطع مشتركة

(ب) تتقاطع المستقيمات فى نقطة واحدة بالضبط .

(جـ) تنطبق المستقيمات الثلاثة

تمارين ١ ــ ٢ (صفحة ١٦)

١ ــ د ، و   ٢ ــ ب ، جـ ، و

٣ ــ (أ) $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$

(ب) $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$

(جـ) $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$

(د) غير متوافقة

٤ ــ (أ) $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2$

(ب) $x_1 = 2 - 3t, x_2 = 4 + t, x_3 = 2 - t, x_4 = t$

(جـ) $x_1 = -1 - 5s - 5t, x_2 = s, x_3 = 1 - 3t, x_4 = 2 - 4t, x_5 = t$

(د) غير متوافقة

٥ ــ (أ) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$

(ب) $x_1 = -\frac{3}{7}t, x_2 = -\frac{4}{7}t, x_3 = t$

(جـ) $x_1 = 1, x_2 = 2s, x_3 = s, x_4 = -3t, x_5 = t$

٧ ــ (أ) غير متوافقة   (ب) $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$ (جـ) $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$

٩ ــ (أ) $x_1 = 0, x_2 = -3t, x_3 = t$ (ب) غير متوافقة

١١ ــ (أ) $x_1 = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, x_2 = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$

(ب) $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$

١٢ ــ $a = 4$ عدد لانهائي ، $a = -4$ لايوجد ، $a \neq \pm 4$ واحد بالضبط .

١٤ ــ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هما الحلان الممكنان

١٥ ــ $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0$

تمارين ١ ــ ٣ (صفحة ٢١)

١ ــ أ ، جـ ، د

٢ ــ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

٣ ــ $x_1 = -\frac{1}{4}s, x_2 = -\frac{1}{4}s - t, x_3 = s, x_4 = t$

٤ ــ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

٥ - $x = \frac{t}{8}, y = \frac{5t}{16}, z = t$

٦ - $\lambda = 4, \lambda = 2$

تمارين ١ — ٤ (صفحة ٢٨)

١ - (أ) غير معرف (ب) 4×2 (جـ) غير معرف

(د) غير معرف (هـ) 5×5 (و) 5×2

٣ - $a = 5, b = -3, c = 4, d = 1$

٤ - (أ) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 19 \\ -2 & 0 & 0 \\ 32 & 9 & 25 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} -28 & 7 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

٥ - (أ) غير معرف (ب) $\begin{bmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{bmatrix}$

(هـ) غير معرف (و) $\begin{bmatrix} 48 & 15 & 31 \\ 0 & 2 & 6 \\ 38 & 10 & 27 \end{bmatrix}$

٦ - (أ) $\begin{bmatrix} 67 & 41 & 41 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 63 & 67 & 57 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 24 & 56 & 97 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{bmatrix}$

٧ - 182

تمارين ١ ــ ٥ (صفحة ٣٨)

٣ - $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

٥ - لا

٦ - $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ٧ - $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

٨ - $A^2 - 2A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$

٩ - $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

١٠ - $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

١١ - (c) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

١٢ - $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

١٧ - من الجائز ألا يكون $0A$ ، $A0$ بنفس المقاييس .

١٨ - $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

تمارين ١ ــ ٦ (صفحة ٤٧)

١ - أ ، ب ، د ، ز

٢ - (أ) أضف ناقص خمسة أمثال الصف الأول إلى الثانى :

(ب) أبدل الصفين الأول والثالث .

(جـ) إضرب الصف الثانى فى 1/8

٣ - (أ) $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٤ - لا . لأن C لايمكن الحصول عليه بإجراء عملية صفوف واحدة على B .

٥ - (أ) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (جـ) غير قابلة للانعكاس

٦ - (أ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (ب) غير قابلة للانعكاس

(جـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

٧ - (أ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

(جـ) غير قابلة للانعكاس

٨ - $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٩ - (أ) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (ب) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(جـ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

١١ - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

١٢ - (أ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

تمارين ١ ــ ٧ (صفحة ٥٥)

١ - $x_1 = 41, x_2 = -17$

٢ - $x_1 = \frac{46}{27}, x_2 = -\frac{13}{27}$

٣ - $x_1 = -7, x_2 = 4, x_3 = -1$

٤ $x_1 = 1, x_2 = -11, x_3 = 16$

٥ - $x = 1, y = 5, z = -1$

٦ - $w = 1, x = -6, y = 10, z = -7$

٧ - (أ) $x_1 = \frac{16}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}, x_3 = -\frac{11}{3}$ (ب) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}$

(جـ) $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -4$ (د) $x_1 = \frac{41}{42}, x_2 = -\frac{5}{6}, x_3 = \frac{25}{21}$

٨ - (أ) $b_2 = 3b_1, b_3 = -2b_1$ (ب) $b_3 = b_2 - b_1, b_4 = 2b_1 - b_2$

٩ - (أ) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ب) $X = \begin{bmatrix} 4t \\ \frac{5t}{2} \\ t \end{bmatrix}$

تمارين ٢ ـ ١ (صفحة ٦٢)

١ - (أ) 5 (ب) 7 (جـ) 10 (د) 0 (هـ) 4 (و) 5

٢ - (أ) فردية (ب) فردية (جـ) زوجية (د) زوجية (هـ) زوجية (و) فردية

٣ - 5 ٤ - 0 ٥ - 59 ٦ - $k^2 - 4k - 5$ ٧ - 0

٨ - 425 ٩ - 104 ١٠ - $-k^4 - k^3 + 18k^2 + 9k - 21$

١١ -(أ) $\lambda = 3, \lambda = 2$ (ب) $\lambda = 2, \lambda = 6$ ١٤ - 275

١٥ - (أ) 120 (ب) -120

تمارين ٢ ـ ٢ (صفحة ٦٧)

١ - (أ) 6 (ب) -16 (جـ) 0 (د) 0

٢ - 21 ٣ - -5 ٤ - -36 ٥ - 35

٦ - -128 ٧ - -72 ٨ - $\frac{1}{6}$ ٩ - 0

١٠ - (أ) 5 (ب) 10 (جـ) 5 (د) 10

تمارين ٢ ـ ٣ (صفحة ٧٥)

١ - (أ) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

٤ - (أ) قابلة للانعكاس (ب) غير قابلة للانعكاس

(جـ) غير قابلة للانعكاس (د) غير قابلة للانعكاس

٥ - (أ) 135 (ب) $\frac{8}{5}$ (جـ) $\frac{1}{40}$ (د) -5

٦ - إذا كانت $x = 0$ فإن الصفين الأول والثالث متناسبان .

إذا كانت $x = 2$ فإن الصفين الأول والثانى متناسبان .

٨ - (أ) $k = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17}), k = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$ (ب) $k = -1$

تمارين ٢ ـ ٤ (صفحة ٨٥)

١ - (أ) $M_{11} = 29, M_{12} = -11, M_{13} = -19, M_{21} = 21, M_{22} = 13, M_{23} = -19$
$M_{31} = 27, M_{32} = -5, M_{33} = 19$

(ب) $C_{11} = 29, C_{12} = 11, C_{13} = -19, C_{21} = -21, C_{22} = 13$
$C_{23} = 19, C_{31} = 27, C_{32} = 5, C_{33} = 19$

٢ - (أ) $M_{13} = 36, C_{13} = 36$ (ب) $M_{23} = 24, C_{23} = -24$

(جـ) $M_{22} = -48, C_{22} = -48$ (د) $M_{21} = -108, C_{21} = 108$

٣ - 152

٤ - (أ) $\begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$ (ب) $(\frac{1}{152})\begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$

٥ - 48 ٦ - -66 ٧ - 0 ٨ - $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$ ٩ - -120

١٠ - 0

١١ - $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

١٢ - $x_1 = 1, x_2 = 2$

١٣ - $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$

١٤ - $x = \frac{26}{21}, y = \frac{25}{21}, z = \frac{5}{7}$

١٥ - $x_1 = -\frac{30}{11}, x_2 = -\frac{38}{11}, x_3 = -\frac{40}{11}$

١٦ - $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = -1, x_4 = 8$

١٧ - قاعدة كرامر لاتصلح للتطبيق .

١٨ - $z = 2$

تمارين ٣ ــ ١ (صفحة ٩٧)

٣ - (أ) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 3)$ (ب) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-7, 2)$

(جـ) $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, -12, -11)$ (د) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-8, 7, 4)$

٤ - $\overrightarrow{PQ}$ حيث $Q = (9, 5, 1)$ هو أحد الحلول الممكنة .

٥ - $\overrightarrow{PQ}$ حيث $P = (0, 4, -8)$ هو أحد الحلول الممكنة .

٦ - (أ) $(-2, 0, 4)$ (ب) $(23, -15, 4)$

(جـ) $(-1, -5, 2)$ (د) $(-39, 69, -12)$

(هـ) $(-30, -7, 5)$ (و) $(0, -10, 0)$

٧ - $\mathbf{x} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1)$

٨ - $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 3$

١٠ – $c_1 = -t, c_2 = -t, c_3 = t$ (حيث t اختيارى)

١١ – (أ) $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (ب) $(\frac{23}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$

١٢ – (أ) $x' = 5, y' = 8$ (ب) $x = -1, y = 3$

تمارين ٣ ـــ٢ (صفحة ١٠١)

١ – (أ) 5 (ب) $5\sqrt{2}$ (جـ) 3 (د) $\sqrt{3}$ (هـ) $\sqrt{129}$ (و) 9

٢ – (أ) $\sqrt{31}$ (ب) $2\sqrt{26}$ (جـ) $\sqrt{209}$ (د) $\sqrt{93}$

٣ – (أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{14} + \sqrt{2}$ (جـ) $4\sqrt{14}$ (د) $2\sqrt{37}$

(هـ) $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ (و) 1

٤ – $k = \pm\dfrac{3}{\sqrt{21}}$

٧ – $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

٨ – كرة قطرها 1 ومركزها عند (x_0, y_0, z_0) .

تمارين ٣ ـــ ٣ (صفحة ١٠٧)

١ – (أ) -10 (ب) -3 (جـ) 0 (د) -20

٢ – (أ) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (ب) $-\dfrac{3}{\sqrt{58}}$ (جـ) 0 (د) $-\dfrac{20}{3\sqrt{70}}$

٣ – (أ) منفرجة (ب) حادة (جـ) منفرجة (د) متعامدان

٤ – (أ) $(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13})$ (ب) $(0, 0)$ (جـ) $(-\frac{80}{13}, 0, -\frac{16}{13})$ (د) $(\frac{32}{89}, \frac{12}{89}, \frac{16}{89})$

٥ – (أ) $(\frac{14}{13}, \frac{21}{13})$ (ب) $(2, 6)$ (جـ) $(-\frac{11}{13}, 1, \frac{55}{13})$ (د) $(-\frac{32}{89}, -\frac{12}{89}, \frac{73}{89})$

٧ – $\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$

٨ – (أ) 6 (ب) 36 (جـ) $24\sqrt{5}$ (د) $24\sqrt{5}$

١٠ – $\cos\theta_1 = 0, \cos\theta_2 = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \cos\theta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

١٣ – $\theta = \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

١٤ – $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

تمارين ٣ — ٤ (صفحة ١١٦)

١ - (أ) $(-23, 7, -1)$ (ب) $(-20, -67, -9)$ (جـ) $(-78, -52, -26)$
(د) $(0, -56, -392)$ (هـ) $(24, 0, -16)$ (و) $(-12, -22, -8)$

٢ - (أ) $(12, 30, -6)$ (ب) $(-2, 0, 2)$

٣ - (أ) $\frac{1}{2}\sqrt{374}$ (ب) $9\sqrt{13}$

٧ - $x = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, t)$ حيث t اختيارى

٩ - 227

١٠ - (أ) $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ and $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$
(ب) $(-1, 0, 0)$
(جـ) $(0, 0, -1)$

تمارين ٣ — ٥ (صفحة ١٢٥)

١ - (أ) $(x - 2) + 4(y - 6) + 2(z - 1) = 0$
(ب) $-(x + 1) + 7(y + 1) + 6(z - 2) = 0$
(جـ) $z = 0$
(د) $2x + 3y + 4z = 0$

٢ - (أ) $x + 4y + 2z - 28 = 0$ (ب) $-x + 7y + 6z - 6 = 0$
(جـ) $z = 0$ (د) $2x + 3y + 4z = 0$

٣ - (أ) $(5, 0, 0)$ نقطة فى المستوى و $\mathbf{n} = (2, -3, 7)$ متجه عمودى إذا
$2(x - 5) - 3y + 7z = 0$ هى صورة النقطة والعمودى تعطى أية نقط أخرى وأعمدة
أخرى إجابات صحيحة .

(ب) $x + 3z = 0$ أحد الحلول الممكنة

٤ - (أ) $2y - z - 1 = 0$ (ب) $x + 9y - 5z - 16 = 0$

٥ - (أ) $x = 2 + t, y = 4 + 2t, z = 6 + 5t$
(ب) $x = -3 + 5t, y = 2 - 7t, z = -4 - 3t$
(جـ) $x = 1, y = 1, z = 5 + t$
(د) $x = t, y = t, z = t$

٦ - (أ) $x - 2 = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 6}{5}$ (ب) $\frac{x + 3}{5} = \frac{y - 2}{-7} = \frac{z + 4}{-3}$

٧ - (أ) $x = 6 + t, y = -1 + 3t, z = 5 - 9t$ or $x = 7 + t, y = 2 + 3t$
$z = -4 - 9t$ إجابات ممكنة

(ب) $x = -t, y = -t, z = -t$ or $x = -1 - t, y = -1 - t, z = -1 - t$

إجابات ممكنة

٧ – (أ) $x = -\frac{11}{7} + \frac{23}{7}t, y = -\frac{12}{7} - \frac{1}{7}t, z = t$

(ب) $x = \frac{5}{3}t, y = t, z = 0$

٩ – (أ) $x - 2y - 17 = 0, y + 2z - 5 = 0$ (ب) $3x - 5y = 0, 2y - z = 0$

١٠ – مستوى $xy : z = 0$ ، مستوى $xz : y = 0$ ، مستوى $yz : x = 0$

١٢ – $(-\frac{222}{7}, -\frac{64}{7}, \frac{78}{7})$

١٣ – $5x - 2y + z - 30 = 0$

١٥ – $(-17, -1, 1)$

١٦ – $x - 4y + 4z + 9 = 0$

تمارين ٤ — ١ (صفحة ١٣٢)

١ – (أ) $(-3, -4, -8, 4)$ (ب) $(53, 34, 49, 20)$ (جـ) $(-1, 2, 7, -10)$

(د) $(-99, -84, -150, 30)$ (هـ) $(-63, -28, -21, -69)$ (و) $(2, 6, 15, -14)$

٢ – $(-\frac{7}{6}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3})$ ٣ – $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$

٥ – (أ) 5 (ب) $\sqrt{11}$ (جـ) $\sqrt{14}$ (د) $\sqrt{48}$

٦ – (أ) $\sqrt{73}$ (ب) $\sqrt{14} + 3\sqrt{7}$ (جـ) $4\sqrt{14}$ (د) $\sqrt{1801}$

(هـ) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (و) 1

٨ – $k = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}$

٩ – (أ) -1 (ب) -1 (جـ) 0 (د) 27

١٠ – (أ) $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ و $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

١١ – (أ) $\sqrt{10}$ (ب) $3\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{59}$ (د) 10

تمارين ٤ — ٢ (صفحة ١٣٨)

١ – ليس بفضاء خطي. الفرض ٨ غير متحقق .

٢ – ليس بفضاء خطي. الفرض ١٠ غير متحقق .

٣ – ليس بفضاء خطي. الفرضان ٩ ، ١٠ غير متحقق .

٤ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

٥ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

٦ – ليس بفضاءاً خطي الفرضان ٥ ، ٦ غير متحققين .

٧ – الفئة تكون فضاء خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

٨ – ليس بفضاء خطي . الفرضان ٧ ، ٨ غير متحققين .

٩ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

١٠ – ليس بفضاء خطي الفروض ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ غير متحققة .

١١ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

١٢ – الفئةتكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

١٣ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

١٤ – الفئة تكون فضاءاً خطياً بالنسبة إلى العمليتين المعطاتين .

تمارين ٤ – ٣ (صفحة ١٤٨)

١ – أ ، جـ   ٢ – ب ، جـ   ٣ – أ ، ب ، د   ٤ – ب ، د ، هـ

٥ – أ ، ب ، د

٦ – (أ) $(5, 9, 5) = 3\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (ب) $(2, 0, 6) = 4\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

(جـ) $(0, 0, 0) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}$ (د) $(2, 2, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$

٧ – (أ) $5 + 9x + 5x^2 = 3\mathbf{p}_1 - 4\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$

(ب) $2 + 6x^2 = 4\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_3$

(جـ) $0 = 0\mathbf{p}_1 + 0\mathbf{p}_2 + 0\mathbf{p}_3$

(د) $2 + 2x + 3x^2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_3$

٨ – أ ، جـ ، د

٩ – (أ) المتجهات منشئة   (ب) المتجهات غير منشئة

(جـ) المتجهات غير منشئة   (د) المتجهات منشئة

١٠ – أ ، جـ

١١ – كثيرات الحدود لا تنشئ P_2 .

١٢ – أ ، ب ، د

١٣ – $8x - 7y + z = 0$

١٤ – $x = 2t, y = 7t, z = -t$ حيث $-\infty < t < +\infty$

تمارين ٤ — ٤ (صفحة ١٥٥)

١ – (أ) $\mathbf{u}_2$ مضاعف قياسى للمتجه $\mathbf{u}_1$.

(ب) المتجهات مرتبطة خطيا من نظرية ٦ .

(جـ) $\mathbf{p}_2$ مضاعف قياسى للمتجه $\mathbf{p}_1$.

(د) B مضاعف قياسى للمتجه A .

٢ – (أ) مستقلة (ب) مستقلة (جـ) مستقلة (د) مرتبطة

٣ – (أ) مستقلة (ب) مستقلة (جـ) مستقلة (د) مستقلة

٤ – (أ) مستقلة (ب) مستقلة (جـ) مستقلة (د) مرتبطة

٥ – (أ) مرتبطة (ب) مستقلة (جـ) مستقلة (د) مرتبطة

(هـ) مرتبطة (و) مرتبطة

٦ – (أ) غير واقعة فى مستوى

(ب) تقع فى مستوى.

٧ – (أ) غير واقعة على نفس المستقيم .

(ب) غير واقعة على نفس المستقيم .

(جـ) تقع على نفس المستقيم .

٨ – $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = 1$

تمارين ٤ — ٥ (صفحة ١٦٣)

١ – (أ) يحتوى أساس R^2 على متجهين .

(ب) يحتوى أساس R^3 على ثلاثة متجهات .

(جـ) يحتوى أساس P_2 على ثلاثة متجهات .

(د) يحتوى أساس M_{22} على أربعة متجهات .

٢ – أ ، ب ٣ – أ ، ب ٤ – جـ ، د

٧ – لا يوجد أساس ، البعد = صفر ٦ – أى من المتجهات $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ، $\mathbf{v}_3$

٨ – الأساس : $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ ، البعد $= 2$

٩ – لا يوجد أساس ، البعد = صفر

١٠ – الأساس $(3, 1, 0), (-1, 0, 1)$ ، البعد $= 2$

١١ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر

١٢ - لا يوجد أساس ، البعد = صفر

١٣ - (أ) $(\frac{2}{3}, 1, 0), (-\frac{5}{3}, 0, 1)$ ، (ب) $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$

(جـ) $(2, -1, 4)$ ، (د) $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$

١٤ - (أ) من بعد ٣ (ب) من بعد ٢ (جـ) ذو بعد واحد

١٥ - من بعد ٣

تمارين ٤ — ٦ (صفحة ١٧٣)

١ -
$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = (2, -1, 0, 1)$$
$$r_2 = (3, 5, 7, -1)$$
$$r_3 = (1, 4, 2, 7)$$

٢ - (أ) $(1, -3)$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (جـ) 1

٣ - (أ) $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(جـ) 2

٤ - (أ) $(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) 3

٥ - (أ) $(1, 0, 5, 2, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -3, 0, 1)$

(ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(جـ) 3

٦ - (أ) $(1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$
(ب) $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$
(جـ) $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$

٨ - (أ) 3 (ب) القيمة الصغرى من m ، n .

٩ - (أ) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
(ب) b ليست من فضاء أعمدة A .
(جـ) b ليست من فضاء أعمدة A .

تمارين ٤ — ٧ (صفحة ١٧٩)

١ - (أ) -12 (ب) 0 (جـ) 0 (د) 120
٢ - (أ) -5 (ب) 0 (جـ) 3 (د) 52
٣ - (أ) 16 (ب) 56
٤ - (أ) -6 (ب) 0
٦ - (أ) ليس بضرب داخلي ، الفرض ٤ غير متحقق .
(ب) ليس بضرب داخلي ، الفرضان ٢ ، ٣ غير متحققين .
(جـ) $\langle u, v \rangle$ ضرب داخلي .
(د) ليس بضرب داخلي ، الفرض ٤ غير متحقق .
١٦ - (أ) $-\frac{28}{15}$ (ب) 0
١٧ - (أ) 0 (ب) 1 (جـ) $-\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

تمارين ٤ — ٨ (صفحة ١٨٥)

١ - (أ) $\sqrt{21}$ ، (ب) $\sqrt{206}$ ، (جـ) $\sqrt{2}$ ، (د) 0
٢ - (أ) $\sqrt{10}$ ، (ب) $\sqrt{85}$ ، (جـ) 1 ، (د) 0
٣ - (أ) $\sqrt{6}$ ، (ب) 5
٤ - (أ) $\sqrt{90}$ ، (ب) 0
٥ - (أ) $\sqrt{45}$ ، (ب) 0
٦ - (أ) $\sqrt{18}$ ، (ب) 0
٧ - $\sqrt{18}$ ٨ - (أ) $\sqrt{98}$ (ب) 0

٩ - (أ) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{-3}{\sqrt{73}}$ (جـ) 0

(د) $\frac{-20}{9\sqrt{10}}$ (هـ) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (و) $\frac{2}{\sqrt{55}}$

١٠ - (أ) 0 (ب) 0

١١ - (أ) $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ (ب) 0

١٢ - (أ) $k = -3$ (ب) $k = -2, k = -3$

١٤ - أ ، ب ، جـ

١٥ - $\pm\frac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$

تمارين ٤ — ٩ (صفحة ١٩٧)

١ - ب ٢ - ب ، د

٣ - أ ٤ - أ

٧ - (أ) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (ب) $(1, 0), (0, -1)$

٨ - (أ) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(ب) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0, \frac{30}{\sqrt{11925}}, \frac{105}{\sqrt{11925}}\right)$

٩ - $\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0\right),$

$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

١٠ - $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

١١ - $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

١٢ - $\mathbf{w}_1 = (-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}), \mathbf{w}_2 = (\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5})$

١٣ - $\mathbf{w}_1 = (\frac{39}{42}, \frac{93}{42}, \frac{120}{42}), \mathbf{w}_2 = (\frac{3}{42}, -\frac{9}{42}, \frac{6}{42})$

١٤ - $\mathbf{w}_1 = (-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}), \mathbf{w}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{19}{4}, -\frac{9}{4})$

٢٢ - $Q(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}); \frac{3}{7}\sqrt{35}$

٢٣ - $Q(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{16}{7})$

تمارين ٤ ــ ١٠ (صفحة ٢١٦)

١ - (أ) $(w)_S = (3, -7), [w]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

(ب) $(w)_S = (\frac{5}{28}, \frac{3}{14}), [w]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$

(ج) $(w)_S = \left(a, \frac{b-a}{2}\right), [w]_S = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

٢ - (أ) $(\mathbf{v})_B = (3, -2, 1), [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $(\mathbf{v})_B = (-2, 0, 1), [\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

٣ - (أ) $(\mathbf{p})_S = (4, -3, 1), [\mathbf{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $(\mathbf{p})_B = (0, 2, -1), [\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

٤ - $(A)_B = (-1, 1, -1, 3), [A]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

٥ ــ (أ) $(\mathbf{w})_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}), [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(ب) $(\mathbf{w})_S = (0, -2, 1), [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

٦ ــ (أ) $\mathbf{w} = (16, 10, 12)$ (ب) $\mathbf{q} = 3 + 4x^2$ (جـ) $B = \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

٧ ــ (أ) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{13}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3$

٨ ــ (أ) $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

٩ ــ (أ) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$

١٠ ــ (أ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

١١ ــ (أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$

١٢ ــ (أ) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

١٣ ــ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

١٤ ــ (أ) $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

(ب) $(-3.5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2})$

١٥ ــ (أ) $(-1 + 3\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

(ب) $(2.5 - \sqrt{3}, 2.5\sqrt{3} + 1)$

١٦ ــ (أ) $(.5\sqrt{2}, 1.5\sqrt{2}, 5)$

(ب) $(-2.5\sqrt{2}, 3.5\sqrt{2}, -3)$

١٧ ــ (أ) $(-.5 - 2.5\sqrt{3}, 2, 2.5 - .5\sqrt{3})$

(ب) $(.5 - 1.5\sqrt{3}, 6, -1.5 - .5\sqrt{3})$

١٨ ــ (أ) $(-1, 1.5\sqrt{2}, -3.5\sqrt{2})$

(ب) $(1, -1.5\sqrt{2}, 4.5\sqrt{2})$

١٩ – أ ، ب ، د ، هـ

٢٠ – (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

٢٢ – (أ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢٣ – (أ) $(-2, -1)$ (ب) $(-\frac{4}{5}, -\frac{22}{5})$ (جـ) $(-\frac{11}{5}, \frac{52}{5})$ (د) $(0, 0)$

٢٥ – أ ، جـ

٢٧ – (أ) $(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}, -7)$ (ب) $(2, 1, 6)$ (جـ) $(-\frac{42}{5}, \frac{19}{5}, -3)$

(د) $(0, 0, 0)$

٢٩ – (ب)

٣١ – (أ) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

٣٢ – $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

تمارين ٥ – ١١ (٢٢٩)

١ – خطية   ٢ – غير خطية   ٣ – خطية   ٤ – خطية

٥ – غير خطية   ٦ – خطية   ٧ – خطية   ٨ – غير خطية

٩ — خطية ١٠ — خطية ١١ — غير خطية ١٢ — خطية

١٣ — خطية ١٤ — غير خطية ١٥ — خطية ١٦ — غير خطية

١٧ — خطية ١٨ — خطية ١٩ — خطية ٢٠ — غير خطية

٢١ — $F(x, y) = (-x, y)$

٢٣ — (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 42 \\ -55 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ x - 7z \end{bmatrix}$

٢٤ — (أ) $(2, 0, -1)$ (ب) $T(x, y, z) = (x, 0, z)$

٢٥ — (أ) $T(3, 8, 4) = (-2, 3, -1)$

(ب) $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$

٢٦ — (أ) $T(-1, 2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); T(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$

(ب) $T(-1, 2) = (1, -2); T(x, y) = (-x, -y)$

(جـ) $T(-1, 2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right);$

$$T(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y, \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y\right)$$

(د) $T(-1, 2) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right);$

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y, -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y\right)$$

تمارين ٥ — ٢ (صفحة ٢٣٧)

١ - أ ، جـ ٢ - أ ٣ - أ ، ب ، جـ ٤ - أ

٥ - ب ٦ - أ ٧ - $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}; R(T) = V$

٨ - رتبة $1 = (T)$ ، صفرية $1 = (T)$

٩ - رتبة $3 = (T)$ ، صفرية $0 = (T)$

١٠- (أ) رتبة $n = (T)$ ، صفرية $0 = (T)$

(ب) رتبة $0 = (T)$ ، صفرية $n = (T)$

(جـ) رتبة $n = (T)$ ، صفرية $0 = (T)$

١١ - $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z), T(1, 1, 1) = (17, -5)$

١٢ - $T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$

١٣ - (أ) صفرية $(T) = 2$ (ب) صفرية $(T) = 4$

(جـ) صفرية $(T) = 3$ (د) صفرية $(T) = 1$

١٤ - صفرية $(T) = 0$ ، رتبة $(T) = 6$

١٥ - (أ) البعد = صفرية $(T) = 3$

(ب) لا . لكى تكون $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ متفقة لجميع $\mathbf{b}$ فى R^5 ، يجب أن يكون $R(T) = R^5$.
ولكن $R(T) \neq R^5$ لأن رتبة $(T) =$ بعد $R(T) = 4$.

١٦ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{14}{11} \\ \frac{19}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) رتبة $(T) = 2$ ، صفرية $(T) = 1$

١٧ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) رتبة $(T) = 1$ ، صفرية $(T) = 2$

١٨ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(جـ) رتبة $(T) = 2$ ، صفرية $(T) = 2$

١٩ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(جـ) رتبة $(T) = 3$ ، صفرية $(T) = 2$

٢٢ - (أ) $14x - 8y - 5z = 0$ (ب) $x = -t, y = -t, z = t, -\infty < t < +\infty$

٢٦ - يتكون $\ker(D)$ من جميع كثيرات الحدود الثوابت

٢٧ - يتكون $\ker(J)$ من جميع كثيرات الحدود التى على الصورة kx .

تمارين ٥ ـــ ٣ (صفحة ٢٤٧)

١ - (أ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

٢ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

٣ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

٤ - (أ) $(2, -1)$ (ب) $(1, 2)$ (جـ) $(-2, -1)$ (د) $(2, 0)$

٥ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٦ - (أ) $(1, 1, -1)$
(ب) $(1, -1, 1)$
(جـ) $(-1, 1, 1)$

٧ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٨ - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

٩ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

١٠ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

١١ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $-3x^2 + 5x^3 - 2x^4$

١٢ - (أ) $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(ب) $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$

١٣ - (أ) $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[T(\mathbf{v}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{v}_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $T(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix}$

١٤ - (أ) $[T(\mathbf{v}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ب) $T(\mathbf{v}_1) = 16 + 51x + 19x^2, T(\mathbf{v}_2) = -6 - 5x + 5x^2,$
$T(\mathbf{v}_3) = 7 + 40x + 15x^2$

(جـ) $T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$

١٨ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $-6 + 48x$

١٩ - (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

تمارين ٥ ــ ٤ (صفحة ٢٥٥)

١ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

٢ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{155}{10} & \frac{9}{2} \\ -\frac{375}{10} & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{61}{10} \\ \frac{18}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$

٣ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} \dfrac{13}{11\sqrt{2}} & -\dfrac{25}{11\sqrt{2}} \\ \dfrac{5}{11\sqrt{2}} & \dfrac{9}{11\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

٤ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

٥ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٦ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

٧ - $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

تمارين ٦ ــ ١ (صفحة ٢٦٣)

١ - (أ) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ (ب) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

(جـ) $\lambda^2 - 12 = 0$ (د) $\lambda^2 + 3 = 0$

(هـ) $\lambda^2 = 0$ (و) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

٢ - (أ) $\lambda = 3, \lambda = -1$ (ب) $\lambda = 4$

(جـ) $\lambda = \sqrt{12}, \lambda = -\sqrt{12}$ (د) لا توجد قيم ذاتية حقيقية .

(هـ) $\lambda = 0$ (و) $\lambda = 1$

٣ - (أ) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 4$: $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

(جـ) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = \sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$

أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -\sqrt{12}$: $\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ 1 \end{bmatrix}$

(د) لا توجد فضاءات ذاتية .

(هـ) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(و) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

٥ - (أ) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ (ب) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

(جـ) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$ (د) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

(هـ) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ (و) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

٦ - (أ) $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ (ب) $\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2}$

(جـ) $\lambda = -8$ (د) $\lambda = 2$

(هـ) $\lambda = 2$ (و) $\lambda = -4, \lambda = 3$

٧ - (أ) $\lambda = 1$: الأساس $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda = 2$: الأساس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\lambda = 3$: الأساس $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\lambda = 0$: الأساس $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\lambda = \sqrt{2}$: الأساس $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 + 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 + 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -\sqrt{2}$ الأساس $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15 - 5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1 - 2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$ ؛

(جـ) $\lambda = -8$: الأساس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$ (د) $\lambda = 2$: الأساس $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\lambda = 2$: الأساس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ (و) $\lambda = -4$ الأساس: $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$، $\lambda = 3$: الأساس $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

٨ - (أ) $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ (ب) $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0$

٩ - (أ) $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$ (ب) $\lambda = 4$

١٠ - (أ) $\lambda = 1$: الأساس $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\lambda = -2$: الأساس $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\lambda = -1$ الأساس: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ب) $\lambda = 4$: الأساس $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

١١ - (أ) $\lambda = -4, \lambda = 3$

(ب) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -4$: $-2 + \frac{8}{3}x + x^2$

أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 3$: $5 - 2x + x^2$

١٢ - (أ) $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

(ب) أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، أساس للفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -2$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، أساس الفضاء الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

١٨ - $1, -1, -2^9, 2^9$.

تمارين ٦ ــ ٢ (صفحة ٢٧٢)

٥ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

٦ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

٧ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٨ — $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٩ — لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

١٠ — $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

١١ — لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

١٢ — $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٣ — لا يمكن تحويله إلى الصورة القطرية .

١٤ — $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٥ — $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

١٦ — $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

١٧ — $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{3} + x, \mathbf{p}_2 = x$

١٩ — $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$

تمارين ٦ — ٣ (صفحة ٢٧٨)

١ — (أ) $\lambda = 0$: أحادى البعد ، $\lambda = 2$: أحادى البعد

(ب) $\lambda = 1$: أحادى البعد ، $\lambda = -1$: ثنائى البعد

(جـ) $\lambda = 3$: أحادى البعد ، $\lambda = 0$: ثنائى البعد

(د) $\lambda = 0$. أحادى البعد ، $\lambda = 6$: ثنائى البعد

(هـ) $\lambda = 0$: ثلاثى البعد ، $\lambda = 8$: أحادى البعد

(و) $\lambda = -2$: ثلاثى البعد ، $\lambda = 4$: أحادى البعد

٢ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

٣ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

٤ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

٥ - $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

٦ - $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٧ - $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

٨ - $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٩ –
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

تمارين ٧ — ١ (صفحة ٢٨٦)

١ – (أ)
$$y_1 = c_1e^{5x} - 2c_2e^{-x}$$
$$y_2 = c_1e^{5x} + c_2e^{-x}$$

(ب)
$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$

٢ – (أ)
$$y_1 = c_1e^{7x} - 3c_2e^{-x}$$
$$y_2 = 2c_1e^{7x} + 2c_2e^{-x}$$

(ب)
$$y_1 = -\tfrac{1}{40}e^{7x} + \tfrac{81}{40}e^{-x}$$
$$y_2 = -\tfrac{1}{20}e^{7x} - \tfrac{27}{20}e^{-x}$$

٣ – (أ)
$$y_1 = -c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$
$$y_2 = c_1e^{x} + 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$$
$$y_3 = 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$$

(ب)
$$y_1 = e^{2x} - 2e^{3x}$$
$$y_2 = e^{x} - 2e^{2x} + 2e^{3x}$$
$$y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$$

٤ –
$$y_1 = (c_1 + c_2)e^{2x} + c_3e^{8x}$$
$$y_2 = -c_2e^{2x} + c_3e^{8x}$$
$$y_3 = -c_1e^{2x} + c_3e^{8x}$$

٥ – $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

٦ – $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

تمارين ٧ — ٢ (صفحة ٢٩٢)

١ – (أ) $(1 + \pi) - 2\sin x - \sin 2x$

(ب) $(1 + \pi) - 2\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right]$

٢ – (أ) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\cos x + \cos 2x + \frac{4}{9}\cos 3x - 4\pi \sin x - 2\pi \sin 2x - \frac{4\pi}{3}\sin 3x$

(ب) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$

٣ – $-\frac{1}{2} + \frac{1}{e-1} e^x$

٤ – (أ) $(4e - 10) + (18 - 6e)x$

٥ – (أ) $\frac{3}{\pi} x$

٨ – $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx)$

تمارين ٧ ـــ ٣ (صفحة ٣٠٣)

١ – (أ) $2x^2 - 3xy + 4y^2$ (ب) $x^2 - xy$ (جـ) $5xy$ (د) $4x^2 - 2y^2$ (هـ) y^2

٢ – (أ) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٣ – (أ) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-7 \quad 2]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 7 = 0$

(ب) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [5 \quad 8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3 = 0$

(جـ) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$

(د) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 7 = 0$

(هـ) $[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [7 \quad -8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 5 = 0$

٤ – (أ) قطع ناقص (ب) قطع ناقص (جـ) قطع زائد (د) قطع زائد
(هـ) دائرة (و) قطع مكافىء (ز) قطع مكافىء (ح) قطع مكافىء
(ط) قطع مكافىء (ى) دائرة .

٥ – (أ) $9x'^2 + 4y'^2 = 36$ قطع ناقص
(ب) $x'^2 - 16y'^2 = 16$ قطع زائد
(جـ) $y'^2 = 8x'$ قطع مكافىء

(د) $x'^2 + y'^2 = 16$ دائرة

(هـ) $18y'^2 - 12x'^2 = 419$ قطع زائد

(و) $y' = -\frac{1}{7}x'^2$ قطع مكافىء

٦ - (أ) $2x'^2 - 3y'^2 = 8$ قطع زائد

(ب) $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$ قطع مكافئ

(جـ) $7x'^2 + 3y'^2 = 9$ قطع ناقص

(د) $4x'^2 - y'^2 = 3$ قطع زائد

٧ - $2x''^2 + y''^2 = 6$ قطع ناقص

٨ - $13y''^2 - 4x''^2 = 81$ قطع زائد

٩ - $2x''^2 - 3y''^2 = 24$ قطع زائد

١٠ - $6x''^2 + 11y''^2 = 66$ قطع ناقص

١١ - $4y''^2 - x''^2 = 0$ قطع زائد

١٢ - $\sqrt{29}y'^2 - 3x' = 0$ قطع مكافئ

١٣ - (أ) خطان متقاطعان $y = x$ ، $y = -x$

(ب) لا يوجد منحنى

(جـ) المنحنى هو النقطة الوحيدة $(0, 0)$

(د) المنحنى هو المستقيم $y = x$

(هـ) المنحنى يتكون من الخطين المتوازيين $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y = \pm 2$

(و) المنحنى هو النقطة الوحيدة $(1, 2)$

تمارين ٧ — ٤ (صفحة ٣١٠)

١ - (أ) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz$

(ب) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz$

(جـ) $xy + xz + yz$

(د) $x^2 + y^2 - z^2$

(هـ) $3z^2 + 3xz$

(و) $2z^2 + 2xz + y^2$

٢ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{هـ}) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{و})$$

٣ - (أ) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [7 \quad 0 \quad 2]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 3 = 0$

(ب) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [-3 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0$

(جـ) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0$

(د) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 7 = 0$

(هـ) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \quad -14 \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 9 = 0$

(و) $[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [2 \quad -1 \quad 3]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

٤ - (أ) سطح ناقصي . (ب) سطح زائدي ذو قطعة واحدة .
(جـ) سطح زائدي ذو قطعتين . (د) مخروط ناقصي .
(هـ) سطح مكافئ ناقصي . (و) سطح مكافئ زائدي .
(ز) سطح كرة .

٥ - (أ) $9x'^2 + 36y'^2 + 4z'^2 = 36$ سطح ناقصي
(ب) $6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 = 18$ سطح زائدي ذو قطعة واحدة
(جـ) $3x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 3$ سطح زائدي ذو قطعتين
(د) $4x'^2 + 9y'^2 - z'^2 = 0$ مخروط ناقصي
(هـ) $x'^2 + 16y'^2 - 16z' = 32$ سطح زائدي ذو قطعة واحدة
(و) $7x'^2 - 3y'^2 + z' = 0$ سطح مكافئ زائدي
(ز) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 25$ سطح كرة

٦ - (أ) $25x'^2 - 3y'^2 - 50z'^2 - 150 = 0$ سطح زائدى ذو قطعتين
(ب) $2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 - 5 = 0$ سطح ناقصى
(جـ) $9x'^2 + 4y'^2 - 36z = 0$ سطح مكافئ ناقصى
(د) $x'^2 - y'^2 + z' = 0$ سطح مكافئ زائدى

٧ - $x''^2 + y''^2 - 2z''^2 = -1$ سطح زائدى ذو قطعتين
٨ - $x''^2 + y''^2 + 2z''^2 = 4$ سطح ناقصى
٩ - $x''^2 - y''^2 + z'' = 0$ سطح مكافئ زائدى
١٠ - $6x''^2 + 3y''^2 - 8\sqrt{2}z'' = 0$ سطح مكافئ ناقصى

تمارين ٨ — ١ (صفحة ٣١٧)

١ - (أ) $.28 \times 10^1$ (ب) $.3452 \times 10^4$ (جـ) $.3879 \times 10^{-5}$
(د) $-.135 \times 10^0$ (هـ) $.17921 \times 10^2$ (و) $-.863 \times 10^{-1}$

٢ - (أ) $.280 \times 10^1$ (ب) $.345 \times 10^4$ (جـ) $.388 \times 10^{-5}$
(د) $-.135 \times 10^0$ (هـ) $.179 \times 10^2$ (و) $-.863 \times 10^{-1}$

٣ - (أ) $.28 \times 10^1$ (ب) $.35 \times 10^4$ (جـ) $.39 \times 10^{-5}$
(د) $-.14 \times 10^0$ (هـ) $.18 \times 10^2$ (و) $-.86 \times 10^{-1}$

٤ - $x_1 = -3, x_2 = 7$
٥ - $x_1 = \frac{13}{8}, x_2 = \frac{14}{8}, x_3 = \frac{21}{8}$
٦ - $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
٧ - $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$
٨ - $x_1 = .997, x_2 = 1.00$
٩ - $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$
١٠ - $x_1 = 0, x_2 = 1$ (بدون استخدام محور الحذف)، $x_1 = 1, x_2 = 1$ (باستخدام محور الحذف)

تمارين ٨ — ٢ (صفحة ٣٢٣)

١ - $x_1 \approx 2.81, x_2 \approx .94$ الحل المضبوط هو $x_1 = 3, x_2 = 1$
٢ - $x_1 \approx .954, x_2 \approx -1.90$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = -2$
٣ - $x_1 \approx -2.99, x_2 \approx -.998$ الحل المضبوط هو $x_1 = -3, x_2 = -1$
٤ - $x_1 \approx 0.00, x_2 \approx 1.98$ الحل المضبوط هو $x_1 = 0, x_2 = 2$
٥ - $x_1 \approx 3.03, x_2 \approx 1.02$ الحل المضبوط هو $x_1 = 3, x_2 = 1$
٦ - $x_1 \approx 1.01, x_2 \approx -2.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = -2$
٧ - $x_1 \approx -3.00, x_2 \approx -1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = -3, x_2 = -1$
٨ - $x_1 \approx .005; x_2 \approx 2.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 0, x_2 = 2$

٩ – $x_1 \approx .492, x_2 \approx .006, x_3 \approx -.996$ الحل المضبوط هو $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -1$

١٠ – $x_1 \approx 1.00, x_2 \approx .998, x_3 = 1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

١١ – $x_1 \approx .499, x_2 \approx .0004, x_3 \approx -1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -1$

١٢ – $x_1 \approx 1.00, x_2 \approx 1.00, x_3 \approx 1.00$ الحل المضبوط هو $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

١٣ – أ ، د ، هـ

تمارين ٨ — ٣ (صفحة ٣٢٣)

١ – (أ) $\lambda = 3$ (ب) لا توجد قيمة ذاتية سائدة ، (جـ) $\lambda = 6$ (د) $\lambda = 3$

٢ – (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .503 \end{bmatrix}$ (ب) 5.02

(جـ) المتجه الذاتى السائد هو $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هى 5

(د) الخطأ المئوى هو $.4\%$

٣ – (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ .750 \end{bmatrix}$ (ب) 8.01

(جـ) المتجه الذاتى السائد هو $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هى 8

(د) الخطأ المئوى هو $.125\%$

٤ – (أ) $\begin{bmatrix} 1.00 \\ -\ .560 \end{bmatrix}$ (ب) -4.00

(جـ) المتجه الذاتى السائد هو ; $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائدة هى 4 –

(د) الخطأ المئوى هو 0%

٥ – (أ) بعد إتمام تكرارين تكون القيمة الذاتية السائدة ويكون المتجه الذاتى السائد تقريبا هما

$\lambda_1 \approx 20.1$ و $\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ .119 \end{bmatrix}$

(ب) القيمتان المضبوطتان للقيمة الذاتية السائدة و المتجه الذاتى السائد هما $\lambda_1 = 20$

و $x = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{17} \end{bmatrix}$

٦ – (أ) بعدإتمام ثلاثة تكرارات تكون القيمة الذاتية السائدة ويكون المتجه الذاتى السائد تقريبا هما

$\lambda_1 \approx -9.95$ و $\mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} -.978 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) القيمتان المضبوطتان للقيمة الذاتية السائدة و المتجه الذاتى السائد هما $\lambda_1 = -10$ و $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

٧ - (أ) $\begin{bmatrix} .027 \\ .027 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ب) 10.0

(ﺟ) المتجه الذاتى السائد هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، القيمة الذاتية السائد هى **10**

تمارين ٨ — ٤ (صفحة ٣٣٨)

١ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ .509 \end{bmatrix}$ (ب) 7.00 (ﺟ) $\lambda_2 \approx 2.00, \mathbf{v}_2 \approx \begin{bmatrix} -.51 \\ 1 \end{bmatrix}$

(د) القيمتان الذاتيتان المضبوطتان 7 ، 2 ، المتجهان الذاتيان المضبوطان

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

٢ - (أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ .503 \end{bmatrix}$ (ب) 12.0 (ﺟ) $\lambda_2 \approx 2.02, \mathbf{v}_2 \approx \begin{bmatrix} -.532 \\ 1 \end{bmatrix}$

(د) القيمتان الذاتيتان المضبوطتان 12 ، 2 ، المتجهان الذاتيان المضبوطان

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

قائمة المصطلحات العلمية

الفصل الأول

System	نظام
Linear equations	معادلات خطية
Soultion	حل
Solution set	فئة الحل
Consistent	متآلف (متوافق)
Inconsistent	متناقض (غير متآلف)
Matrix	مصفوفة
Augmented matrix	المصفوفة الممتدة
Elementary row operation	عملية صفوف بسيطة
Row echelon form	صورة صفية مميزة
Reduced row echelon form	صورة صفية مميزة مختزلة
Elimination	حذف
Row	صف
Column	عمود
Homogeneous	متجانس
Trivial solution	حل تافه
Nontrivial solution	حل غير تافه
Entries	مكونات – عناصر
Square matrix	مصفوفة مربعة
Order	نوع
Main diagonal	قطر رئيسى
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Zero matrix	مصفوفة صفرية
Identity matrix	مصفوفة الوحدة

Invertible	قابل للانعكاس
Inverse	انعكاس
Elementary matrix	مصفوفة بسيطة
Row equivalent	متكافئ صفيا

الفصل الثانى

Determinant	محدد
Permutation	تبديلة
Even permutation	تبديلة زوجية
Odd permutation	تبديلة فردية
Inversion	تعاكس
Elementary product	حاصل ضرب بسيط
Determinant function	دالة المحدد
Upper triangular	مثلثى علوى
Lower triangular	مثلثى سفلى
Transpose	تحوير
Operation	عملية
Expansion	مفكوك
Symmetric	متماثل
Skew symmetric	معتل التماثل
Rule	قاعدة

الفصل الثالث

Vector	متجه
Space	فضاء
Initial point	نقطة بداية
Terminal point	نقطة نهاية
Equal	متساوى
Sum	جمع
Zero vector	المتجه الصفرى

Negative	سالب
Additive inverse	انعكاس الجمع
Scalar	عدد قياسي
Product	ناتج الضرب
Component	مركبة
Rectangular coordinates	أحداثيات متعامدة
Coordinate axes	محاور الأحداثيات
Plane	مستوى
Coordinate planes	مستويات الأحداثيات
Right handed system	نظام يد يمنى
Left handed system	نظام يد يسرى
Norm	مقياس
Dot product	ضرب داخلي
Projection	إسقاط
Inner product	ضرب داخلي
Euclidean inner product	ضرب داخلي أقليدى
Angle	زاوية
Orthogonal projection	مسقط عمودى
Cross product	ضرب اتجاهي
Unit vector	متجه عيارى
Standard unit vector	متجه عيارى معتاد
Point normal form	صيغة النقطة و العمود
General form	الصيغة العامة
Parametric equations	معادلات بارامترية
Symmetric equations	معادلات متماثلة

الفصل الرابع

Vector space	فضاء خطي ، فضاء اتجاهي
Euclidean n-space	فضاء أقليدى نونى
Ordered n-tuple	قوس نونى مرتب
Scalar multiple	مضاعف قياسي

Standard operations	عمليات معتادة
Euclidean distance	مسافة أقليدية
Complex vector space	فضاء خطى مركب
Zero vector space	فضاء خطى صفرى
Closed	مغلق
Sub-space	فضاء جزئى
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Solution vector	متجه حل
Solution space	فضاء حل
Linear combination	تركيبة خطية
Span	ينشأ
Space spanned by	الفضاء المنشأ من
Linear independence	استقلال خطى
Basis	أساس
Dimension	بعد
Standard basis	أساس معتاد
Finite dimensional	منتهى البعد ، ذو بعد منتهى
Infinite dimensional	لا نهائى البعد
Row space	فضاء الصفوف
Column space	فضاء الأعمدة
Rank	رتبة
Row vectors	متجهات الصفوف
Column vectors	متجهات الأعمدة
Inner product space	فضاء الضرب الداخلى
Inequality	متباينة
Length	الطول
Orthogonal	عمودى
Orthogonal basis	أساس متعامد
Orthonormal	عيارى متعامد
Best approximation	التقريب الأمثل
Coordinate vector	متجه إحداثيات
Coordinate matrix	مصفوفة أحداثيات

Transition matrix	مصفوفة انتقال
Rotation	دوران
Transformation	تحويل

الفصل الخامس

Linear transformation	تحويل خطى
Map	يرسم
Image	صورة
Multiplication by A	ضرب فى A
Matrix transformation	تحويل مصفوفات
Zero transformation	تحويل صفرى
Linear operator	مؤثر خطى
Dilation	تمديد
Contraction	تقليص
Kernel	نواه
Range	المدى
Null space	نواة (فراغ صفرى)
Nullity	صفرية
Similarity	اتفاق

الفصل السادس

Eigen	ذاتى
Eigen value	قيمة ذاتية
Eigen vector	متجه ذاتى
Proper value	قيمة خاصة (قيمة ذاتية)
Characteristic value	قيمة مميزة (قيمة ذاتية)
Latent root	جذر كامن (جذر ذاتى)

الفصل السابع

Application	تطبيقات
General solution	حل عام
Particular solution	حل خاص

Initial value proplem	مسئلة قيمة ابتدائية
Approximation problems	مسائل التقريب
Fourier series	متسلسلة فورير
Least square	المربعات الصغرى
Trigonometric polynomial	كثيرة حدود مثلثية
Quadratic	تربيعى
Conic section	مقطع مخروطى
Ellipse	قطع ناقص
Circle	دائرة
Hyperbola	قطع زائد
Parabola	قطع مكافئ
Quadratic surfaces	أسطح تربيعية

الفصل الثامن

Pivot	الارتكاز
Mantissa	عشرية
Significant	معنوى
Rounded value	قيمة دائرية
Iteration	تكرار
Displacement	إزاحة
Dominant	سائد
Estimation	تقدير
Error	خطأ

الفهــرس



رقم الايداع بدار الكتب

٢٨٦٦ / ١٩٨١



هذا الكتاب هو أحد كتب برنامج WilEy ARAbooks الذى وضع لتلبية الحاجة الماسة لتوفير كتب دراسية علمية باللغة العربية يتضمن البرنامج ترجمات عربية لبعض الكتب القيمة التى تصدرها دار جون وايلى، بالاضافة الى كتب جيدة مؤلفة أصلا باللغة العربية



JOHN WILEY & SONS, INC.
605 Third Avenue
New York, N.Y. 10158
U.S.A.

ANTON
LINEAR ALGEBRA
Second Edition

مطابع الأهرام التجارية

ISBN 0-471-06389-4